LEITFADEN

FÜR DIE

VORLESUNGEN

ÜBER

DARSTELLENDE GEOMETRIE

AN DER

HERZOGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU BRAUNSCHWEIG

VON

PROF. DR. REINHOLD MÜLLER

ALS MANUSKRIPT GEDRUCKT

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1899

LEITFADEN

FÜR DIE

VORLESUNGEN

ÜBER

DARSTELLENDE GEOMETRIE

AN DER

HERZOGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE

ZU BRAUNSCHWEIG

LEITFADEN

FÜR DIE

VORLESUNGEN

ÜBER

DARSTELLENDE GEOMETRIE

AN DER

HERZOGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU BRAUNSCHWEIG

VON

PROF. DR. REINHOLD MÜLLER

ALS MANUSKRIPT GEDRUCKT

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1899

VORREDE.

Der vorliegende Leitfaden, zu dessen Herausgabe ich mich nur auf wiederholt aus den Kreisen meiner Zuhörer geäufserte Wünsche entschlossen habe, ist ausschliefslich für die Studierenden der hiesigen Hochschule bestimmt und soll auch von diesen blofs im Zusammenhange mit der Vorlesung zur Repetition des dort Gebotenen benutzt werden. Er soll hinsichtlich des Nachschreibens eine Erleichterung gewähren, ohne das für den Lernenden so wichtige Nachzeichnen der Figuren zu ersparen. Deshalb ist die Beigabe von Textfiguren möglichst vermieden worden; eine Ausnahme bilden in dieser Beziehung nur einzelne Abschnitte, die — wie z. B. die Schattenkonstruktionen bei Schraubenflächen — wegen Mangels an Zeit im Vortrage zuweilen übergangen werden, hier aber der Vollständigkeit wegen aufgenommen sind.

Der Leitfaden enthält im wesentlichen blofs den theoretischen Teil des Vortrages ohne die zahlreichen Anwendungen, die in der Vorlesung selbst eingehend berücksichtigt werden. — Für den Umfang und die Behandlung des vorgetragenen Lehrstoffes sind allein die Bedürfnisse der hiesigen Hochschule mafsgebend gewesen, wie sie in Unterredungen mit den Vertretern der in Betracht kommenden technischen Wissenschaften sich herausgestellt haben. Aus diesem Gesichtspunkte erklärt sich vor allem der Verzicht auf die Heranziehung der projektiven Geometrie, die in den offiziellen Lehrplan der Hochschule nicht aufgenommen ist. Einzelne Gebiete, wie z. B. die Flächen zweiter Ordnung, sind deshalb nur flüchtig gestreift worden; sie finden ihre Ergänzung in einer besonderen Vorlesung über Geometrie der Lage, welche von denjenigen Studierenden, die eine weitergehende mathematische Ausbildung anstreben, regelmäfsig im dritten Semester gehört wird. — Die Nichtbenutzung der projektiven Geometrie bringt es mit sich, dafs die Ergebnisse der Vorlesung über analytische Geometrie mehrfach verwendet werden. Der hierdurch erreichte Zeitgewinn kommt im Vortrage der gründlicheren Einübung des Lehrstoffes an Beispielen, die auch der Praxis entlehnt werden, zu Gute.

Die frühzeitige Einführung der schiefen Parallelprojektion soll es dem Studierenden ermöglichen, anschauliche Skizzen von Anfang an in methodischer Weise herzustellen. In Vortrag und Übungen wird auch späterhin die schiefe Projektion neben der senkrechten in umfangreicherem Mafse angewendet, als es in diesem Leitfaden zum Ausdruck gelangt.

In dem Abschnitte über Centralprojektion glaubte ich auf die künstlerische Seite des Gegenstandes, die im Vortrage Berücksichtigung findet, der Kürze halber nicht eingehen zu sollen.

Aus dem bisher Gesagten ergiebt sich wohl zur Genüge, dafs der Leitfaden für die vorhandenen Lehrbücher der darstellenden Geometrie in keiner Weise einen Ersatz bilden soll.

Es war ursprünglich beabsichtigt, das bereits fertig gestellte Manuskript auf autographischem Wege vervielfältigen zu lassen; nur dem Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung ist es zu verdanken, dafs der Leitfaden den Studierenden in einer technisch vollkommeneren Ausführung dargeboten werden kann.

Braunschweig, im August 1899.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNIS.

Einleitung.

Die darstellende Geometrie lehrt, räumliche Figuren in einer Ebene abzubilden und Aufgaben über dieselben auf Grundlage der Abbildung durch Zeichnung zu lösen.

Zur Herstellung solcher Abbildungen dient das Verfahren der Projektion: Um die Centralprojektion einer gegebenen Figur zu erhalten, zieht man von einem festen Punkte (Projektionscentrum) nach allen Punkten der Originalfigur gerade Linien (projizierende Strahlen) und bestimmt ihre Schnittpunkte mit der Bild- oder Projektionsebene. Rückt das Projektionscentrum in unendliche Entfernung, werden also die projizierenden Strahlen untereinander parallel, so entsteht eine Parallelprojektion, die als senkrecht (orthogonal) oder schief bezeichnet wird, je nachdem die projizierenden Strahlen auf der Bildebene senkrecht stehen oder nicht.

An Stelle der Ebene kann unter Umständen eine krumme Fläche als Bildfläche treten; auch läfst sich das Projektionsverfahren in solcher Weise verallgemeinern, dafs von den räumlichen Objekten Bilder entstehen, die selbst wieder drei Dimensionen haben (Reliefperspektive).

Erster Abschnitt.

Die Parallelprojektionen.

I. Darstellung einfacher Raumgebilde in schiefer Parallelprojektion.

1. Ist Π die Projektionsebene und l eine Gerade, welche die Richtung der projizierenden Strahlen angiebt, so erhält man von irgend einem Originalpunkte P die Projektion P_s als den Schnittpunkt von Π mit der Parallelen durch P zu l.

Konstruiert man zu allen Punkten A, B, C ... einer Originalgeraden g die Projektionen A_s, B_s, C_s ..., so bilden die projizierenden

Strahlen eine Ebene (die projizierende Ebene von g), und diese schneidet die Π in der Bildgeraden g_s. Die Projektion einer Geraden ist also im allgemeinen wieder eine Gerade; sie ist ein Punkt, wenn die Originalgerade die Richtung der projizierenden Strahlen hat.

Die Gerade g_s geht durch den Schnittpunkt G von g mit Π (Spur oder Spurpunkt von g).

Die Abschnitte auf der Bildgeraden verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf der Originalgeraden.

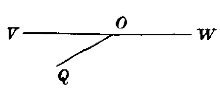
Die Projektion einer zur Bildebene parallelen Strecke ist der Originalstrecke gleich und parallel. Ist demnach eine ebene Figur zur Bildebene parallel, so sind Bild- und Originalfigur kongruent und parallel.

2. Sind die Originalgeraden AB und CD parallel, so sind auch die projizierenden Ebenen parallel. Hieraus folgt: Parallelen Originalgeraden entsprechen parallele Bildgeraden.

Zieht man $BE \parallel B_s A_s$ bis AA_s und $DF \parallel D_s C_s$ bis CC_s, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABE und CDF: Die Projektionen paralleler Strecken verhalten sich wie die Originalstrecken.

3. Wenn wir in Zukunft Raumfiguren in schiefer Parallelprojektion darstellen, so wollen wir bezüglich der an sich vollkommen willkürlichen Richtung der projizierenden Strahlen ein für allemal eine bestimmte Verabredung treffen, indem wir etwa festsetzen: Diese Richtung soll immer so gewählt werden, dafs die Projektion jeder auf der Zeichenebene Π senkrechten Strecke halb so gross wird, wie die Originalstrecke, und mit der Breitenrichtung der Zeichenebene einen Winkel von 30° einschliefst. Oder genauer ausgedrückt: Ziehen wir in der vertikal gedachten Zeichenebene Π durch irgend einen Punkt O die horizontale Gerade VW, sowie die beliebig lange Strecke OQ unter einem Winkel von 30° gegen OV und errichten in O zu Π nach vorn das Lot $OP = 2 . OQ$, so soll die im Raume liegende Gerade PQ die Richtung der projizierenden Strahlen angeben (Fig. 1).

Fig. 1.



Man zeichne hiernach die schiefe Projektion eines Würfels mit horizontaler Grundfläche, von der zwei Kanten zu VW parallel sind, ferner diejenige eines aufrecht stehenden Kreuzes, dessen vordere Fläche $\parallel \Pi$ ist, u. s. w.

4. Die schiefe Projektion eines Vielflachs ist ohne weiteres konstruierbar, wenn eine Reihe von Strecken bekannt ist, die zur Bildebene parallel oder senkrecht sind, und die das Vielflach in der angenommenen Lage bestimmen.

Darstellung einer regelmäfsigen fünfseitigen Pyramide mit horizontaler Grundfläche. Die vor Π befindliche Grundfläche $ABCDE$ sei gegeben durch die Schnittlinie VW ihrer Ebene mit Π und durch die Lage $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$, in die sie gelangt, wenn sie um

VW in Π nach unten umgelegt wird ($C_0 D_0 \parallel VW$). Die Höhe der Pyramide sei $= h$.

Um zunächst die schiefe Projektion A_s von A zu ermitteln, ziehe man $A_0 J \perp VW$ als Umlegung des von A auf VW gefällten Lotes. Macht man dann $\angle A_s J V = 30^0$ und $JA_s = \frac{1}{2} JA_0$ (bequemer $A_0 A_s \perp JA_s$), so ist JA_s die Projektion von JA. — Auf $A_0 J$ befinden sich die Mittelpunkte F_0, G_0 von $B_0 E_0$, $C_0 D_0$, sowie der Mittelpunkt M_0 des Fünfecks. Zieht man durch diese Punkte Parallelen zu $A_0 A_s$, so findet man auf JA_s die entsprechenden Punkte F_s, G_s, M_s. Da $BE \parallel VW$, also $\parallel \Pi$ ist, so ist auch $B_s E_s \parallel VW$ und $F_s B_s = F_s E_s = F_0 B_0$. Ebenso ergiebt sich $C_s D_s$. Die Höhenlinie der Pyramide ist $\parallel \Pi$ und $\perp VW$; ihre Projektion geht also durch $M_s \perp VW$ und ist $= h$.

5. Projiziert man die bisher dargestellten Körper in unveränderter Lage senkrecht auf Π, so zeigt sich, daſs die entstehenden Bilder weniger anschaulich sind, wie die zuvor erhaltenen, weil alle Geraden und Ebenen, die auf Π senkrecht stehen, bezw. als Punkte und Geraden abgebildet werden. Um auch in senkrechter Projektion anschauliche Bilder zu erhalten, müſste man die specielle Lage aufgeben, welche die Körper gegen die Bildebene einnehmen, was jedoch die Konstruktion der Bilder erheblich erschweren würde. Die schiefe Parallelprojektion erweist sich demnach als besonders bequem, um von stereometrischen Figuren in einfachster Weise anschauliche Skizzen herzustellen, und in diesem Sinne soll sie im Folgenden beständig benutzt werden.

II. Punkt, gerade Linie und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zu einander senkrechte Projektionsebenen.

Darstellung des Punktes.

6. Ein Punkt im Raume ist durch Angabe seiner schiefen oder senkrechten Parallelprojektion noch nicht bestimmt. Das gebräuchlichste Verfahren, um die Lage des Originalpunktes zu bestimmen, besteht in der Anwendung senkrechter Projektion auf zwei zu einander senkrechte Projektionsebenen, von denen die eine immer horizontal, die andere also vertikal gestellt wird. Indem wir diese Darstellungsweise den folgenden Entwickelungen zu Grunde legen, lassen wir die vertikale Projektionsebene stets mit der Zeichenebene (Wandtafel) zusammenfallen und gebrauchen die feststehenden Bezeichnungen:

Horizontal- oder Grundriſsebene, erste Projektionsebene, erste Tafel, Π_1;
Vertikal- oder Aufriſsebene, zweite Projektionsebene, zweite Tafel, Π_2;
Projektionsachse oder kurz Achse für die Schnittlinie x beider Ebenen;

ferner in Bezug auf einen Originalpunkt P:

Horizontal- oder Grundrifsprojektion, erste Projektion, P';
Vertikal- oder Aufrifsprojektion, zweite Projektion, P'';
erster bezw. zweiter projizierender Strahl PP', PP''.

Wir unterscheiden vordere und hintere Π_1 ($+\Pi_1$ und $-\Pi_1$), sowie obere und untere Π_2 ($+\Pi_2$ und $-\Pi_2$). Die Projektionsebenen teilen den Raum in vier Quadranten, die in der Reihenfolge ($+\Pi_1$, $+\Pi_2$), ($+\Pi_1$, $-\Pi_2$), ($-\Pi_1$, $-\Pi_2$), ($-\Pi_1$, $+\Pi_2$) als erster bis vierter Quadrant bezeichnet werden.

7. Die Ebene durch die beiden projizierenden Strahlen des Punktes P ist senkrecht auf Π_1 und Π_2, also auch auf x; verstehen wir demnach unter P_x ihren Schnittpunkt mit x, so sind $P'P_x$ und $P''P_x$ auf x senkrecht, d. h.: Die von den beiden Projektionen eines Punktes auf die Achse gefällten Lote treffen sich in der Achse. (Man zeichne hierzu, sowie zu den folgenden Figuren eine Skizze in schiefer Projektion auf die Zeichenebene Π_2.)

In dem Rechteck $PP'P_xP''$ ist $PP' = P''P_x$, in Worten: Die Entfernung eines Punktes von der ersten Projektionsebene (sein erster Tafelabstand) ist gleich der Entfernung seiner zweiten Projektion von der Achse. Ebenso ist $PP'' = P'P_x$.

8. Um die Zeichnung auf eine einzige Ebene zu beschränken, drehen wir die Π_1 um x, bis sie mit Π_2 zusammenfällt, und zwar wollen wir diese Umlegung immer in der Weise ausführen, dass die $+\Pi_1$ auf die $-\Pi_2$ zu liegen kommt. Dann fällt $P'P_x$ in die Gerade $P''P_x$, d. h.: Die Projektionen eines Punktes liegen in einem Lote zur Projektionsachse.

Umgekehrt bilden irgend zwei Punkte P' und P'' der Zeichenebene, deren Verbindungslinie auf x senkrecht steht, die beiden Projektionen eines Raumpunktes P, der auf diese Weise eindeutig bestimmt ist. Der Punkt P befindet sich oberhalb, in oder unterhalb Π_1, je nachdem P'' oberhalb, in oder unterhalb x liegt, und er befindet sich vor, in oder hinter Π_2, je nachdem P' unterhalb, in oder oberhalb x liegt.

Wir nennen Halbierungsebenen die beiden durch die Achse gehenden Ebenen H_1 und H_2, die den ersten und dritten, bezw. den zweiten und vierten Quadranten halbieren. Die beiden Projektionen eines Punktes der H_1 liegen symmetrisch zu x, diejenigen eines Punktes der H_2 fallen zusammen.

9. Obwohl ein Raumgebilde durch Grund- und Aufrifs seiner Punkte bereits vollkommen bestimmt ist, erweist es sich unter besonderen Umständen als zweckmäfsig, seine senkrechte Projektion auf eine dritte Ebene Π_3 hinzuzufügen, die auf Π_1 und Π_2, also auf x senkrecht ist und Seitenrifs- oder Kreuzrifsebene genannt wird. Dann entstehen die neuen Projektionsachsen $y = \Pi_1 \times \Pi_3$ und $z = \Pi_2 \times \Pi_3$, und die drei Geraden x, y, z schneiden sich rechtwinklig im Punkte $O = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$.

Ist P''' die dritte Projektion des Punktes P, so haben die von P' und P''' auf y gefällten Lote denselben Fufspunkt P_y (7). Ebenso treffen sich die Lote von P'' und P''' auf z in einem Punkte P_z.

Die drei Tafelabstände $P'''P = OP_x$, $P''P = OP_y$, $P'P = OP_z$ werden in der analytischen Geometrie des Raumes als die Koordinaten von P bezeichnet. Sie dienen zur eindeutigen Bestimmung von P, wenn jeder einzelne Abstand von der betreffenden Ebene aus nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten negativ gerechnet wird.

Zum Zwecke der Darstellung wird naturgemäfs auch die Π_3 mit der Zeichenebene Π_2 zur Deckung gebracht. Man erreicht dies durch eine Drehung um z, etwa so, dafs die vordere Π_3 auf die linke Halbebene Π_2 zu liegen kommt. Man kann aber auch die Π_3 zunächst um y in die Π_1 umlegen (z. B. die obere Π_3 in die linke Halbebene Π_1) und dann die vereinigten Ebenen um x in dem früher festgesetzten Sinne so lange drehen, bis sie mit Π_2 zusammenfallen. Man beachte, dass bei der ersten Art der Umlegung die y-Achse, bei der zweiten die z-Achse doppelt auftritt.

10. Aufgabe. Aus der ersten und zweiten Projektion P' und P'' eines Punktes P die dritte P''' zu konstruieren. Die Ebene Π_3 sei durch die Gerade $z \perp x$ gegeben. Wendet man die zuerst erwähnte Umlegung an, so fällt die Strecke $P_z P'''$, die gleich $P_x P'$ ist, in die Gerade $P'' P_z$ bezw. in deren Verlängerung über P_z. Hieraus folgt für die Bestimmung von P''' die einfache Regel: Man ziehe durch P'' eine Parallele zu x und mache auf ihr von z aus in geeignetem Sinne die Strecke $P_z P''' = P_x P'$.

Für die zweite Art der Umlegung ziehe man die Gerade $P' P_y \parallel x$ bis y und mache auf ihr bezw. auf ihrer Verlängerung die Strecke $P_y P''' = P_x P''$.

11. Zuweilen ist es vorteilhaft, die neue Projektionsebene so zu wählen, dafs sie nur auf einer der beiden ursprünglichen Tafeln senkrecht steht. Sei z. B. $\Pi_3 \perp \Pi_1$ und y die Schnittlinie beider Ebenen. Legt man, wie zuletzt, die Π_3 um y in die Π_1 um, so ist nach 8. $P'P''' \perp y$ und nach 7. Abst. (P''', y) = Abst. $(P, \Pi_1) = P'' P_x$.

Darstellung der Geraden.

12. Eine Originalgerade g hat zu ihrer Grund- und Aufrifsprojektion im allgemeinen zwei Geraden, g' und g'', nämlich die Schnittlinien ihrer ersten und zweiten projizierenden Ebene bezw. mit Π_1 und Π_2. (1).

Ist P ein Punkt von g, so liegt P' auf g', P'' auf g'', und zwar so, dafs $P'P'' \perp x$ ist. Daher verhalten sich die Abschnitte auf g' wie die entsprechenden Abschnitte auf g''.

13. Gerade Linien in specieller Lage gegen die Projektionsebenen.

a) Ist $g \parallel \Pi_1$, so ist $g'' \parallel x$.
b) Ist $g \parallel x$, so sind g' und $g'' \parallel x$.
c) Ist $g \perp \Pi_1$, so ist g' ein Punkt, $g'' \perp x$.

d) Ist $g \perp x$, d. h. liegt g in einer zu x senkrechten Ebene, so befinden sich g' und g'' in einer zu x senkrechten Geraden.

e) Liegt g in der ersten Halbierungsebene H_1, so sind g' und g'' symmetrisch in Bezug auf x.

f) Liegt g in H_2, so decken sich g' und g''.

14. Zwei beliebige Geraden g' und g'' der Zeichenebene, von denen keine auf x senkrecht steht, können umgekehrt als Projektionen einer Geraden g im Raume angesehen werden, die auf diese Weise eindeutig bestimmt ist. Bringt man nämlich die Π_1 mit der in ihr liegenden Geraden g' in ihre ursprüngliche Lage $\perp \Pi_2$, so ergiebt sich g als Schnittlinie der beiden projizierenden Ebenen, die durch g' und g'' bezw. $\perp \Pi_1$ und $\perp \Pi_2$ gelegt werden.

Steht aber $g' \perp x$, so ist g'' entweder ein Punkt, oder g' und g'' liegen in derselben Vertikalen. Im letzten Falle decken sich die beiden projizierenden Ebenen; die Originalgerade ist also durch Angabe von g' und g'' noch nicht bestimmt. Hierzu bedarf es der Projektionen A', A'' und B', B'' zweier Punkte A und B der Geraden, oder der dritten Projektion g''' auf eine $\Pi_3 \perp x$.

15. Unter dem ersten bezw. zweiten Spurpunkte der Geraden g versteht man ihre Schnittpunkte G_1 und G_2 mit Π_1 und Π_2 (1).

Aufgabe. Die Spurpunkte der durch ihre Projektionen g', g'' gegebenen Geraden g zu konstruieren. Da der Punkt G_1 der Geraden g angehört, so liegt G_1' in g' und G_1'' in g''; dabei ist $G_1' G_1'' \perp x$ (12). Da sich ferner G_1 in Π_1 befindet, so fällt G_1' mit G_1 zusammen, und G_1'' liegt in x. Man bestimme demnach den Schnittpunkt G_1'' von g'' mit x und ziehe $G_1'' G_1 \perp x$ bis g'. — In analoger Weise ergiebt sich $G_2 : G_2' = g' \times x$, $G_2' G_2 \perp x$ bis g''.

Umgekehrt sind durch die Spuren G_1 und G_2 die Punkte G_1'' und G_2' und damit die Projektionen g' und g'' von g bestimmt.

Um die Lage der Originalgeraden aus ihren Projektionen leichter beurteilen zu können, denkt man sich die Projektionsebenen als undurchsichtig und betrachtet die projizierenden Strahlen als Sehstrahlen aus einem unendlich fernen Auge, das sich für die erste Projektion oberhalb der Π_1, für die zweite vor der Π_2 befindet. Dann ist der unterhalb Π_1 liegende Teil von g für das erste Auge unsichtbar; für das zweite ist er, soweit er dem zweiten Quadranten angehört, bei der ursprünglichen Stellung der Π_1 sichtbar, seine Aufrifsprojektion wird aber, wie überhaupt die ganze $-\Pi_2$, von der umgelegten $+\Pi_1$ verdeckt. Das Analoge gilt von dem hinter der Π_2 liegenden Teile von g. Deshalb ist nur das im ersten Quadranten befindliche Stück von g in beiden Projektionen als sichtbar voll auszuziehen.

16. Ist g als Verbindungslinie der Punkte A und B gegeben, die in einer zu x senkrechten Ebene liegen, so bestimmt man die Spurpunkte G_1, G_2 mit Hilfe des Seitenrisses g'''. Man findet zunächst A''' und B''' (10), hierauf G_1''' auf y und G_2''' auf z.

17. Aufgabe. Die Neigungswinkel γ_1, γ_2 zu bestimmen, welche die durch ihre Spuren G_1, G_2 gegebene Gerade g bezw. mit Π_1, Π_2 bildet. (Erste und zweite Tafelneigung von g.) Der Winkel γ_1 liegt im Raume bei G_1 in dem rechtwinkligen Dreieck $G_2 G_1 G_2'$, dessen Katheten $G_2 G_2'$ und $G_2' G_1$ bekannt sind; macht man also auf x die Strecke $G_2' G_1^0 = G_2' G_1$, so ist $\angle G_2 G_1^0 G_2' = \gamma_1$ und $\Delta G_2 G_1^0 G_2'$ die Umlegung von $\Delta G_2 G_1 G_2'$ in die Π_2. — Ebenso erhält man γ_2 durch Umlegung von $\Delta G_1 G_2 G_1''$ in die Π_1.

Unter allen Winkeln, welche g mit den durch G_2 gehenden Geraden von Π_2 einschliefst, ist bekanntlich γ_2 der kleinste, also $\gamma_2 \leqq \angle G_1 G_2 G_2'$, wobei das Gleichheitszeichen sich auf den Ausnahmefall $g \perp x$ bezieht. Nun ist aber $\angle G_1 G_2 G_2' = 90^0 - \gamma_1$, folglich $\gamma_1 + \gamma_2 \leqq 90^0$.

Bezeichnet man mit l, l', l'' bezw. die Längen einer auf g liegenden Originalstrecke, sowie ihrer ersten und zweiten Projektion, so ist

$$l' = l \cos \gamma_1, \qquad l'' = l \cos \gamma_2.$$

Die Strecke l erscheint also in jeder Projektion im allgemeinen verkürzt, und zwar sind $\cos \gamma_1$ und $\cos \gamma_2$ die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse.

18. Aufgabe. Die wahre Länge der durch ihre Projektionen $A'B'$, $A''B''$ gegebenen Strecke AB zu konstruieren. Zieht man in der ersten projizierenden Ebene von AB die Gerade $BC \parallel B'A'$ bis AA', so entsteht das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $CB = A'B'$ und $AC = AA' - BB' = A''A_x - B''B_x$. Die wahre Länge von AB ist also gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches $A'B'$ und $A''A_x - B''B_x$ zu Katheten hat. Man ziehe daher die Gerade $B''C'' \parallel x$ bis $A''A'$ und mache auf ihr $C''B_0'' = A'B'$; dann ist $A''B_0'' = AB$.

Die eben ausgeführte Konstruktion läfst sich auch so deuten: Das Dreieck ABC ist durch Drehung um seine vertikale Kathete AC in eine neue Lage AB_0C gebracht worden, in der es $\parallel \Pi_2$ ist. Dann erscheint es im Aufrifs in wahrer Gröfse.

Ebenso ist AB gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $A''B''$ und $A'A_x - B'B_x$.

19. Wenn zwei Geraden einander schneiden, so liegen die Schnittpunkte der gleichnamigen Projektionen in einem Lot zur Achse — und umgekehrt.

Sind zwei Geraden einander parallel, so sind die gleichnamigen Projektionen parallel. — Sind umgekehrt die Geraden g und h durch ihre Projektionen g', g'' und h', h'' gegeben und ist $g' \parallel h'$, $g'' \parallel h''$, so sind die gleichnamigen projizierenden Ebenen parallel, folglich ist auch $g \parallel h$. In dem Ausnahmefalle, dafs g' und g'', sowie h' und h'' in je einer Senkrechten zu x liegen, hat man g''' und h''' zu konstruieren, um zu entscheiden, ob $g \parallel h$ ist.

Darstellung der Ebene.

20. Zur Bestimmung einer Ebene E genügt die Angabe der Projektionen von drei ihrer Punkte oder von zwei ihrer Geraden. Am häufigsten benutzt man dazu ihre Schnittlinien e_1 und e_2 mit Π_1 und Π_2 (erste bezw. zweite Spur oder Spurlinie). Die beiden Spuren treffen sich in x im Achsenschnittpunkte E_x.

Von der Ebene E sieht man in Grund- und Aufriſs dieselbe Seite, oder entgegengesetzte Seiten, je nachdem die im ersten Quadranten liegenden Teile von e_1 und e_2 mit derselben oder mit entgegengesetzten Seiten von x spitze Winkel bilden. Ist die Ebene durch Grund- und Aufriſs dreier Punkte A, B, C gegeben, so liegt der erste oder zweite Fall vor, je nachdem die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind.

Aufgabe. Die dritte Spurlinie e_3 zu konstruieren, in welcher die Ebene E (e_1, e_2) von der auf x senkrechten Ebene Π_3 geschnitten wird. Man bestimme die Punkte $E_y = e_1 \times y$ und $E_z = e_2 \times z$ — den ersten in zwei verschiedenen Lagen, wenn die Π_3 um z in die Π_2 umgelegt wird. Dann ist $e_3 = E_y E_z$.

21. Ebenen in specieller Lage gegen die Projektionsebenen.

a) Ist $\mathsf{E} \parallel \Pi_1$, so liegt e_1 unendlich fern und e_2 ist $\parallel x$. Die zweite Projektion jedes Punktes von E befindet sich auf e_2.

b) Ist $\mathsf{E} \perp \Pi_1$, so ist $e_2 \perp x$, und die erste Projektion jedes Punktes von E liegt auf e_1.

c) Ist $\mathsf{E} \parallel x$, so sind e_1 und $e_2 \parallel x$. Die dritten Projektionen aller Punkte von E (auf eine $\Pi_3 \perp x$) liegen auf e_3.

d) Geht E durch x, so ist die Angabe der dritten Spur oder eines beliebigen Punktes der E erforderlich.

22. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen die Spurpunkte der Geraden in den gleichnamigen Spurlinien der Ebene.

Mit Hilfe dieses Satzes löst man u. a. die Aufgaben:

a) Von der Geraden i, die in der Ebene E (e_1, e_2) liegt, ist die erste Projektion i' gegeben; i'' zu bestimmen. Die Gerade i' schneidet e_1 in J_1, x in J_2'; hieraus findet man J_1'' auf x, J_2 auf e_2 und damit $i'' = J_1'' J_2$. — Ist E durch zwei sich schneidende Geraden g und h gegeben, so ermittele man zu den Punkten $g' \times i' = A'$, $h' \times i' = B'$ die Aufriſsprojektionen A'' und B'' bezw. auf g'' und h''; dann ist $i'' = A''B''$.

b) Die Spurlinien der Ebene E zu konstruieren, die durch zwei sich schneidende Geraden g und h bestimmt ist. Man ermittele von g und h die Spurpunkte G_1, G_2 und H_1, H_2; dann ist $e_1 = G_1 H_1$, $e_2 = G_2 H_2$. — Sind die Spurpunkte von g und h zum Teil oder sämtlich unerreichbar, so ziehe man in geeigneter Weise eine oder mehrere Hilfsgeraden, von denen jede g und h schneidet. Wählt man die Grundriſsprojektion i' einer solchen Hilfsgeraden i beliebig, so findet man i'' nach der vorigen Aufgabe, und dann gehen e_1 und e_2 bezw. durch die Spurpunkte J_1 und J_2 von i.

c) Durch die Gerade g (g', g'') eine Ebene zu legen parallel zu der Geraden h (h', h''). Zieht man durch einen beliebigen

Punkt von g die Gerade $l \parallel h$ (19), so bestimmen g und l die gesuchte Ebene (b).

23. Unter Hauptlinien einer Ebene versteht man diejenigen ihrer Geraden, die zu einer Projektionsebene, und folglich zu der betreffenden Spurlinie parallel sind. Ist m eine erste, n eine zweite Hauptlinie von E, so ist $m' \parallel e_1$, $m'' \parallel x$ und $n' \parallel x$, $n'' \parallel e_2$.

Aufgabe. Von dem Punkte P, der in der Ebene E (e_1, e_2) liegt, ist die erste Projektion P' gegeben; P'' zu bestimmen. Man ziehe durch P eine in E liegende Gerade, etwa die erste Hauptlinie m, also durch P' die Gerade $m' \parallel e_1$; dann liegt P'' auf m''.

24. Sind zwei Ebenen parallel, so sind die gleichnamigen Spuren parallel.

Sind umgekehrt von zwei Ebenen E und Φ die Spuren e_1 und f_1, sowie e_2 und f_2 parallel, so ist im allgemeinen auch $\mathsf{E} \parallel \Phi$. Wenn aber e_1, e_2, f_1, f_2 mit x parallel laufen, so muss noch untersucht werden, ob auch $e_3 \parallel f_3$ ist.

Aufgabe. Durch den Punkt P (P', P'') eine Ebene zu legen, parallel zu der gegebenen Ebene E (e_1, e_2). Zieht man durch P eine Gerade m, die zu irgend einer Geraden g von E parallel ist, so geht die gesuchte Ebene Φ durch m, folglich gehen ihre Spurlinien f_1, f_2 bezw. durch die Spurpunkte M_1, M_2 von m und $\parallel e_1$, e_2. Im allgemeinen wird man g mit einer Spurlinie von E zusammenfallen lassen.

Schnitte von Ebenen und Geraden.

25. Aufgabe. Die Schnittlinie g zweier Ebenen E und Φ zu konstruieren, die durch ihre Spurlinien e_1, e_2 und f_1, f_2 bestimmt sind. Nach 22 ist $G_1 = e_1 \times f_1$, $G_2 = e_2 \times f_2$.

Besondere Fälle. a) Schneiden sich E und Φ in einem Punkte A von x, so fallen G_1 und G_2 mit A zusammen. Um einen zweiten Punkt von g zu erhalten, schneide man E und Φ mit einer passend gewählten Hilfsebene Δ in den Geraden h und i. Dann geht g durch den Schnittpunkt P von h und i. Nimmt man Δ etwa $\perp \Pi_1$ und zieht die erste Spurlinie d_1 beliebig, so ist $h' = i' = d_1$, und man findet $P'' = h'' \times i''$.

b) Liegt der Schnittpunkt von e_1 und f_1 aufserhalb der Zeichenfläche, so benutzt man wiederum eine Hilfsebene, etwa $\Delta \parallel \Pi_1$ $(d_2 \parallel x)$. Diese schneidet E und Φ bezw. in zwei ersten Hauptlinien h und i u. s. w.

c) Ist überdies auch der Punkt G_2 unerreichbar, so kann das letzte Verfahren zweimal angewendet werden. Diese Lösung versagt jedoch, wenn von keinem Punkte der gesuchten Geraden g beide Projektionen zugleich innerhalb der begrenzten Zeichenfläche liegen. Dann bedient man sich zweckmäfsig einer Hilfsebene Δ, die zu einer der gegebenen Ebenen, z. B. zu Φ, parallel ist und deren Spuren d_1 $(\parallel f_1)$ und d_2 $(\parallel f_2)$ die gleichnamigen Spuren von E in erreichbaren Punkten

H_1 und H_2 treffen. Die Gerade g ist parallel zur Schnittlinie $h = H_1 H_2$ von Δ und E; man kann also g' und g'' ziehen, sobald G_2' und G_1'' bestimmt sind. Nun sind aber die beiden Achsenschnittpunkte D_x und F_x von Δ und Φ, und ebenso H_2' und G_2', sowie H_1'' und G_1'' entsprechende Punkte in ähnlichen und parallel liegenden Figuren mit E_x als Ähnlichkeitspunkt; zieht man also durch E_x eine beliebige Gerade, die d_2 in K, f_2 in L schneidet, so ist $L G_2' \parallel K H_2'$ und $L G_1'' \parallel K H_1''$.

26. Aufgabe. Den Schnittpunkt P der Geraden $g\,(g', g'')$ mit der Ebene $\mathsf{E}\,(e_1, e_2)$ zu konstruieren. Man lege durch g eine Hilfsebene und bestimme deren Schnittlinie i mit E; diese schneidet g in P. Im allgemeinen nimmt man als Hilfsebene eine projizierende Ebene von g, z. B. die erste. Dann ist $i' = g'$, und man findet i'' nach 22 a. (Sollte hierbei einer der Spurpunkte von i unerreichbar sein, so erhält man i'', indem man den Schnittpunkt K von i mit einer passend gewählten Geraden der E, z. B. mit einer ersten Hauptlinie m, aufsucht.) — Man erkennt aus der zweiten Projektion, welcher Teil von g oberhalb i, also oberhalb E liegt, und folglich in der ersten Projektion sichtbar ist. Sieht man von E in beiden Projektionen dieselbe Seite (20), so ist im Aufrifs derselbe Teil von g sichtbar, wie im Grundrifs.

In dem speciellen Falle, dafs $\mathsf{E} \perp \Pi_1$ ist, ergiebt sich unmittelbar $P' = g' \times e_1$, und hieraus P'' auf g''.

27. Ist die Ebene E durch drei Punkte A, B, C gegeben, so wendet man dasfelbe Verfahren an, wie in 26, ohne etwa die Spuren von E zu bestimmen: Die erste projizierende Ebene von g schneidet AC und BC bezw. in den Punkten D und E, deren erste Projektionen auf g' liegen, die Ebene E also in der Geraden DE; dann ist $P'' = g'' \times D''E''$.

Auf Grund dieser Aufgabe konstruiert man die Schnittlinie der Ebenen zweier Dreiecke, indem man von irgend zwei der sechs Dreiecksseiten die Schnittpunkte mit der anderen Ebene aufsucht.

Gerade Linien und Ebenen in rechtwinkliger Lage.

28. Ist ein Schenkel eines rechten Winkels zu einer Projektionsebene parallel, so ist die senkrechte Projektion des Winkels auf diese Ebene ein rechter. Sind nämlich g und h die Schenkel eines rechten Winkels mit dem Scheitel A, und ist $h \parallel \Pi_1$, so steht h senkrecht auf AA' und auf g, also auf der Ebene (AA', g). Dann ist aber die zu h parallele Gerade h' auf derselben Ebene senkrecht, also senkrecht auf der Geraden g' dieser Ebene.

Bezeichnet i irgend eine zu g parallele, zu h windschiefe Gerade, so ist $i' \parallel g'$, folglich $\perp h'$. D. h.: Sind überhaupt zwei (sich schneidende oder windschiefe) Geraden senkrecht auf einander, und ist die eine von ihnen zu einer Projektionsebene parallel, so bilden ihre senkrechten Projektionen auf diese Ebene gleichfalls einen rechten Winkel.

Ist umgekehrt $h' \perp i'$ und $h \parallel \Pi_1$, so ist auch $h \perp i$.

29. Diejenigen Geraden einer Ebene E, die auf einer der Spurlinien e_1, e_2 senkrecht stehen, werden als Falllinien bezeichnet, weil sie unter allen Geraden der E die gröfste Neigung (den stärksten Fall) gegen die betreffende Projektionsebene haben. Ist f eine erste Falllinie der E, d. h. $\perp e_1$, so steht nach 28. $f' \perp e_1$.

30. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so stehen die senkrechten Projektionen der Geraden senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene. Denn ist die Gerade $g \perp$ E, so steht sie auch senkrecht auf e_1 und e_2, also ist nach dem zweiten Satze in 28. $g' \perp e_1$, $g'' \perp e_2$.

Stehen umgekehrt g' und g'' bezw. senkrecht auf e_1 und e_2, so ist im allgemeinen auch $g \perp$ E. Sind e_1 und $e_2 \parallel x$, g' und $g'' \perp x$, so ist noch zu untersuchen, ob auch $g''' \perp e_3$ ist.

31. Aufgabe. Die Entfernung des Punktes $P(P', P'')$ von der Ebene E (e_1, e_2) zu bestimmen. Man fälle von P auf E ein Lot l (30) und ermittele seinen Schnittpunkt Q mit E (26), sowie die wahre Länge von PQ (18).

32. Aufgabe. Die Entfernung des Punktes $P(P', P'')$ von der Geraden g (g', g'') zu bestimmen. Erste Lösung. Die gesuchte Entfernung wird durch das Lot PQ gemessen, das von P auf g gefällt ist. Da die Projektionen von PQ nicht ohne weiteres gezeichnet werden können, so ermittelt man den Fufspunkt Q als Schnittpunkt von g mit der Ebene E, die durch $P \perp g$ gelegt wird. Die Spuren von E sind senkrecht auf g' und g''; bezeichnet man also mit m und n bezw. die durch P gehende erste und zweite Hauptlinie, so ist $m' \perp g'$, $m'' \parallel x$ und $n' \parallel x$, $n'' \perp g''$. Durch m und n ist E bestimmt; ohne die zugehörigen Spurlinien zu ermitteln, findet man den Punkt $Q = g \times$ E (27) und konstruiert schliefslich die wahre Länge von PQ (18). — Zweite Lösung vergl. 39.

33. Aufgabe. Die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden g (g', g'') und h (h', h'') zu bestimmen (d. h. diejenige zwischen g und h liegende Strecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht). Man lege durch g eine Ebene E $(e_1, e_2) \parallel h$ (22 c), fälle von einem beliebigen Punkte A von h auf E das Lot l und bestimme seinen Schnittpunkt B mit E (31). Zieht man hierauf $BC \parallel h$ bis g und $CD \parallel BA$ bis h, so ist CD die gesuchte kürzeste Entfernung, deren wahre Länge noch zu bestimmen ist.

Drehung einer Ebene um eine Spur oder um eine Hauptlinie.

34. Eine ebene Figur und ihre senkrechte Projektion sind dann und nur dann kongruent, wenn die Originalfigur zur Projektionsebene parallel liegt. Ist daher eine solche Figur in beliebiger Lage durch Grund- und Aufrifs dargestellt, so findet man ihre wahre Gröfse, indem man sie zu einer der Projektionsebenen parallel macht oder ganz in diese umlegt. Die erste Lagenveränderung bewirkt man durch Drehung der Originalebene um eine zur betreffenden Projektionsebene parallele Hauptlinie, die zweite durch Drehung um die entsprechende Spur.

Bei Darstellungen in schiefer Projektion auf die Zeichenebene Π_2 erfolgt diese Drehung naturgemäfs immer um eine zweite Hauptlinie, bezw. um die zweite Spur.

35. Aufgabe. Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden $g(g', g'')$ und $h(h', h'')$ zu bestimmen. Erste Lösung. Sei P der Schnittpunkt, E die Ebene von g und h. Man konstruiere von beiden Geraden die ersten Spurpunkte G_1, H_1 und drehe die Ebene E um ihre erste Spurlinie $e_1 = G_1 H_1$, bis sie mit Π_1 zusammenfällt. Dann beschreibt P einen Kreisbogen in einer auf e_1 senkrechten Ebene; sein Mittelpunkt ist der Fufspunkt J des Lotes von P auf e_1. Nach 28. ist auch $P'J \perp e_1$; der Punkt P bewegt sich also in der Ebene $PP'J$ und fällt schliefslich in die Gerade $P'J$. Bezeichnet man seine Umlegung mit P_0, so ist $P_0 J = PJ$, d. h. gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $P'J$ und $PP' = P''P_x$. Daher die Lösung: Man ziehe $P'J \perp e_1$, mache auf e_1 die Strecke $JK = P''P_x$ und auf $P'J$ die Strecke $JP_0 = P'K$. Dann sind $P_0 G_1$ und $P_0 H_1$ die Umlegungen von PG_1 und PH_1, also ist $\angle G_1 P_0 H_1$ die wahre Gröfse des Winkels $G_1 P H_1$.

Zweite Lösung. Ist P von Π_1 so weit entfernt, dafs die Ausführung der vorigen Konstruktion zu viel Platz beanspruchen würde, so dreht man die Ebene E zweckmäfsiger um eine passend gewählte erste Hauptlinie m, bis sie $\parallel \Pi_1$ wird. Man ziehe also $m'' \parallel x$ und bestimme zu den Punkten $m'' \times g'' = C''$, $m'' \times h'' = D''$ auf g' und h' bezw. die Punkte C', D', so ist $m' = C'D'$. Sei nun Σ die durch m gehende Horizontalebene, Q ihr Schnittpunkt mit PP', J der Fufspunkt des Lotes von P auf m; dann ist auch $QJ \perp m$, und man erhält in Σ die Umlegung P_0 von P, indem man JP von J aus auf QJ abträgt. Da Q' mit P' zusammenfällt, so ist das Lot von P' auf m' die erste Projektion von QJ. Die wahre Länge von JP ergiebt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $PQ = P''Q''$ und $QJ = P'J'$. Macht man auf $P'J'$ die Strecke $J'P_0'$ gleich dieser Hypotenuse, so ist P_0' die erste Projektion von P_0, mithin $\angle C'P_0'D'$ die erste Projektion des in Σ umgelegten Winkels CPD und daher seine wahre Gröfse.

36. Beziehungen zwischen der Gröfse eines Winkels und der Gröfse seiner senkrechten Projektion. Sei BAC ein spitzer Winkel und $AC \parallel \Pi_1$. Zieht man $BC \perp AC$, so ist auch $B'C' \perp A'C'$ (28). In den rechtwinkligen Dreiecken $B'A'C'$ und BAC sind die Katheten $A'C'$ und AC einander gleich, dagegen ist $B'C' < BC$, folglich auch $\angle A' < \angle A$. D. h.: Ein spitzer Winkel, dessen einer Schenkel zur Projektionsebene parallel ist, wird durch senkrechte Projektion verkleinert.

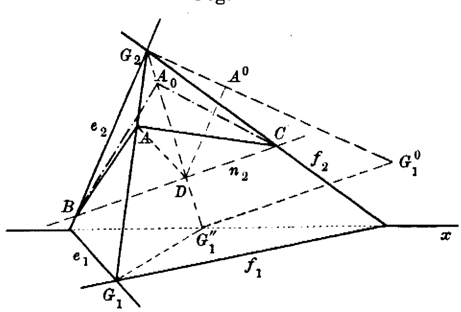
Aus denselben Dreiecken ergiebt sich ferner, dafs $\angle B' > \angle B$ ist. In Worten: Ein spitzer Winkel, dessen einer Schenkel eine Falllinie seiner Ebene ist, wird durch senkrechte Projektion vergröfsert.

Wenn ein Winkel die durch seinen Scheitel gehende Hauptlinie einschliefst, die durch denselben Punkt gehende Falllinie aber aus-schliefst, so wird er durch senkrechte Projektion verkleinert. Schliefst er umgekehrt die Falllinie ein, die Hauptlinie aber aus, so wird er vergröfsert. Schliefst er beide Linien ein oder beide aus, so kann er verkleinert oder vergröfsert werden, oder ungeändert bleiben.

37. Aufgabe. Den Winkel zweier Ebenen E (e_1, e_2) und Φ (f_1, f_2) zu bestimmen. Erste Lösung. Fällt man von einem beliebigen Punkte P auf E und Φ bezw. die Lote g und h, so bilden diese denselben Winkel, wie E und Φ (35).

Zweite Lösung. (Fig. 2 giebt eine Skizze in schiefer Parallelprojektion auf die Zeichenebene Π_2). Man lege senkrecht zur Schnittlinie $G_1 G_2$ von E und Φ eine Ebene N; diese schneidet E und Φ in den Schenkeln des gesuchten Winkels α. Ihre zweite Spurlinie n_2 ist $\perp G_1'' G_2$ und kann im übrigen beliebig angenommen werden. Bezeichnet man mit B, C und D bezw. die Schnittpunkte von n_2 mit e_2, f_2 und $G_1'' G_2$, mit A den noch unbekannten Schnittpunkt von N und $G_1 G_2$, so ist $\angle BAC = \alpha$. Die Gerade DA ist die Schnittlinie der Ebenen N und $G_1 G_1'' G_2$; sie ist die Höhenlinie im Dreieck BAC, weil n_2 auf der Ebene $G_1 G_1'' G_2$ senkrecht steht, und zugleich das Lot von D auf $G_1 G_2$, weil $\mathsf{N} \perp G_1 G_2$ ist. Man erhält daher die wahre Länge von DA, indem man das rechtwinklige Dreieck $G_1 G_1'' G_2$ um seine Kathete $G_1'' G_2$ in Π_2 umlegt: Zieht man $G_1'' G_1^0 \perp G_1'' G_2$ und $= G_1 G_1''$, sowie $DA^0 \perp G_1^0 G_2$, so folgt $DA = DA^0$. Nunmehr ergiebt sich die wahre Gröfse des Winkels α durch Umlegung des Dreiecks BAC um BC in Π_2. Dabei fällt die Höhenlinie DA in die Gerade $G_1'' G_2$; macht man auf dieser $DA_0 = DA^0$, so findet man $\alpha = \angle BA_0C$.

Fig. 2.



38. Aufgabe. Die Neigungswinkel ε_1, ε_2 zu bestimmen, welche die Ebene $\mathsf{E}(e_1, e_2)$ bezw. mit Π_1, Π_2 bildet. Eine Normalebene zu e_1 durch einen beliebigen Punkt O von x schneidet Π_1 in $OQ \perp e_1$, Π_2 in $OR \perp x$, E in der Falllinie QR. Dann ist $\angle OQR = \varepsilon_1$, und man erhält seine wahre Gröfse durch Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks OQR um OR in Π_2: Macht man auf x die Strecke $OQ_0 = OQ$, so ist $\angle OQ_0R = \varepsilon_1$. — In analoger Weise ergiebt sich ε_2.

Da ε_1 und ε_2 komplementär sind zu den entsprechenden Tafelneigungen einer auf E senkrechten Geraden, so folgt aus 17., dafs $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqq 90^0$ ist.

39. Aufgabe. Die Entfernung des Punktes $P(P', P'')$ von der Geraden $g(g', g'')$ zu bestimmen. Zweite Lösung. Man findet die gesuchte Entfernung, indem man in der durch P und g bestimmten Ebene Δ die Gerade $PQ \perp g$ zieht. Um den rechten Winkel zwischen g und PQ, sowie die Strecke PQ im Bilde in wahrer Gröfse zu erhalten, drehe man die Ebene Δ, bis sie zu einer Projektionsebene, z. B. zu Π_2, parallel wird. Als Drehungsachse dient eine zweite Hauptlinie von Δ, am zweckmäfsigsten die durch P gehende Gerade n, die g in R schneidet. Da P und R fest bleiben, so ist nur noch von einem beliebigen Punkte S von g die Umlegung S_0 zu ermitteln. (Vergl. 35, zweite Lösung). Dann ist $R'' S_0''$ die zweite Projektion der Umlegung von g, und man findet $PQ = P'' Q_0'' \perp R'' S_0''$.

Affinität zwischen einer ebenen Figur und ihrer Parallelprojektion. Ebene Vielecke.

40. Zwischen zwei ebenen Figuren, deren eine die senkrechte oder schiefe Parallelprojektion der anderen ist, besteht eine geometrische Abhängigkeit (Verwandtschaft), die als Affinität bezeichnet wird: Jedem Punkte und jeder durch ihn gehenden Geraden der einen Figur entspricht in der anderen bezw. ein Punkt und eine durch diesen gehende Gerade. Parallelen Geraden entsprechen wieder parallele Gerade u. s. f.

Die specielle Lage, in der die beiden Figuren sich befinden, wenn die eine als Projektion der anderen konstruiert wird, heifst die perspektive Lage. Sie ist durch zwei Eigenschaften gekennzeichnet: 1. Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte (Affinitätsstrahlen) sind parallel; 2. alle Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen in einer Geraden, nämlich in der Schnittlinie der Ebenen beider Figuren (Affinitätsachse).

41. Konstruiert man von der in der Ebene E liegenden Originalfigur $ABC\ldots$ in beliebiger Richtung die Projektion $A'B'C'\ldots$ auf die Ebene Π, so schneiden sich AB und $A'B'$ in einem Punkte S der Spurlinie e von E, und da $AA' \parallel BB'$ ist, so verhält sich

$$SA : SB = SA' : SB'.$$

Bringt man die Ebene E durch Drehung um e in irgend eine neue Lage, so gilt dieselbe Proportion; es ist also wieder $AA' \parallel BB'$, d. h. die affinen Figuren $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ bleiben in perspektiver Lage. Wird die Ebene E so weit gedreht, bis sie mit Π zusammenfällt, so folgt: Die Parallelprojektion und die Umlegung einer ebenen Figur in die Bildebene sind perspektiv affin für die Spurlinie der Originalebene als Affinitätsachse.

Sind demnach von einer ebenen Figur $ABC\ldots$ die Spurlinie e, die Umlegung $A_0 B_0 C_0 \ldots$ und das Bild A' eines Punktes A bekannt, so ist die Bildfigur bestimmt.

Im Falle senkrechter Projektion ist $A_0 A' \perp e$.

42. Kennt man von einem ebenen Vieleck $ABCD\ldots$ die Grundrifsprojektion $A'B'C'D'\ldots$ und von drei Punkten A, B, C auch die Aufrifsprojektionen A'', B'', C'', so sind die Aufrifsprojektionen der übrigen Eckpunkte bestimmt. Man findet z. B. zum Punkte $J' = A'C' \times B'D'$ den Punkt J'' auf $A''C''$, somit die Gerade $B''J''$ und auf dieser den Punkt D''.

Im Punkte $Q = A'B' \times A''B''$ sind die beiden Projektionen desjenigen Punktes vereinigt, in welchem die zweite Halbierungsebene H_2 von AB getroffen wird; das analoge gilt von den Punkten $R = B'C' \times B''C''$ u. s. w. Die Punkte Q, R . . . liegen aber sämtlich in einer Geraden w, nämlich in den sich deckenden Projektionen der Schnittlinie der Ebenen H_2 und $ABCD$ . . . Daraus folgt: Die beiden Projektionen einer ebenen Figur sind perspektiv affin — selbstverständlich, nachdem die Umlegung der ersten Projektionsebene in die zweite vollzogen ist.

43. Aufgabe. Ein ebenes Vieleck ABC . . . ist durch die Spuren e_1, e_2 seiner Ebene E und seine erste Projektion $A'B'C'$ . . . gegeben; seine zweite Projektion und seine wahre Gröfse zu bestimmen. Erste Lösung. Man konstruiere zunächst die zweiten Projektionen der Eckpunkte mit Hilfe von Hauptlinien (23), oder sogleich die zweiten Projektionen einzelner Seiten (22 a). Darauf ergiebt sich die wahre Gröfse des Vielecks durch Umlegung der Ebene E, etwa um e_1 in Π_1. Hat man von einem Eckpunkte A (am zweckmäfsigsten von demjenigen, der von e_1 am weitesten entfernt ist) die Umlegung A_0 ermittelt (35), so findet man B_0, C_0 . . . unmittelbar zufolge der perspektiv affinen Beziehung, die nach 41. zwischen Grundrifs und Umlegung besteht.

Eine zweite Lösung beruht auf der Einführung einer neuen Projektionsebene Π_3, die auf E und auf einer der beiden ersten Projektionsebenen, z. B. auf Π_1 und demnach auf e_1 senkrecht steht. Legt man die Π_3 durch einen beliebigen Punkt Q von e_1 und bezeichnet mit O und R bezw. ihre Schnittpunkte mit x und e_2, so ist $y = OQ \perp e_1$, $OR \perp x$ und $e_3 = RQ \perp e_1$. Durch Umlegung der Π_3 in Π_1 gelangt das rechtwinklige Dreieck OQR nach OQR^0, wenn $OR^0 \perp OQ$ und $= OR$ gemacht wird.

Da E auf Π_3 senkrecht steht, so befinden sich die dritten Projektionen aller Punkte von E in e_3; ihre Umlegungen A''', B''' . . . sind also die Schnittpunkte von QR^0 mit den Loten, die von A', B' . . . auf die Projektionsachse y gefällt werden (11). Dann ist

$$\text{Abst. } (A'', x) = AA' = \text{Abst. } (A''', y);$$

ferner $A'A_0 \perp e_1$ und

$$\text{Abst. } (A_0, e_1) = \text{Abst. } (A, e_1) = A'''Q.$$

Fällt der Punkt R^0 in unerreichbare Entfernung, so findet man die Umlegung von e_3, indem man von irgend einem Punkte der Ebene E, z. B. von dem beliebigen Punkte S der Geraden e_2, die dritte Projektion bildet ($SS' \perp x$, $S'S''' \perp y$, Abst. $(S''', y) = SS'$).

Ist das Vieleck durch die Spuren e_1, e_2 seiner Ebene und seine Umlegung A_0B_0 . . . gegeben, so führen dieselben Konstruktionslinien in veränderter Reihenfolge zur Bestimmung von Grund- und Aufrifs.

$\angle OQR^0$ ist gleich dem Neigungswinkel ε_1 von E gegen Π_1.

44. Aufgabe. Von einem ebenen Vieleck kennt man eine erste Hauptlinie m und den ersten Neigungswinkel ε_1 seiner Ebene E, sowie die erste Projektion $A'_0 B'_0 \ldots$ seiner Umlegung in die durch m gehende Horizontalebene Σ; die Projektionen des Vielecks zu bestimmen. Eine dritte Projektionsebene $\Pi_3 \perp m$ schneidet Σ in einer Geraden $y \perp m$ ($y' \perp m'$) und E in einer Falllinie e_3, so dafs $\angle\, e_3, y = \varepsilon_1$ ist. Wird Π_3 um y in Σ umgelegt, so erhält man die Grundrifsprojektion e'_3 der gedrehten Falllinie, indem man $\angle\, \varepsilon_1$ in $Q' = m' \times y'$ an y' anträgt. Macht man auf e'_3 die Strecke $Q'A''' =$ Abst. (A'_0, m'), so ergiebt sich A' als Schnittpunkt der Lote von A'_0 auf m' und von A''' auf y', und es ist Abst. $(A'', m'') =$ Abst. (A''', y').

Mit Hilfe der dritten Projektion auf eine Ebene $\Pi_3 \perp m$ löst man auch die Aufgabe, die Figur $AB \ldots$ um die Gerade m durch einen gegebenen Winkel α zu drehen.

III. Ebenflächige Gebilde.

Das Dreikant.

45. Wir bezeichnen im folgenden immer mit S den Scheitel des Dreikants, mit a, b, c die Kanten, mit A, B, Γ die ihnen der Reihe nach gegenüberliegenden Seiten (Kantenwinkel). Unter $\angle\, a$ soll der Flächenwinkel verstanden werden, den die Ebenen B und Γ an der Kante a einschliefsen.

Aufgabe. Ein Dreikant zu konstruieren aus den drei Seiten A, B, Γ. Wir lassen die Seite A $= b, c$ mit der Zeichenebene zusammenfallen und bilden von dem Dreikant nur die senkrechte Projektion auf diese eine Ebene. Legen wir die Seite B um c, die Seite Γ um b in Zeichenebene um, so gelangt a bezw. nach a_1 und a_2. Zwei Punkte A_1 und A_2, die auf a_1 und a_2 in beliebigen, aber gleichen Abständen von S angenommen werden, sind die zugehörigen Umlegungen eines Punktes A von a; seine Projektion A' ist der Schnittpunkt der Lote von A_1 auf c und von A_2 auf b. Damit ist die Projektion a' von a gefunden.

Bezeichnen wir mit J und K bezw. die Schnittpunkte von c und $A_1 A'$, sowie von b und $A_2 A'$, so sind die Winkel AJA' und AKA' gleich den Flächenwinkeln c und b. Wir erhalten sie in wahrer Gröfse, indem wir die rechtwinkligen Dreiecke $AA'J$ und $AA'K$ in die Zeichenebene umlegen: Machen wir $A'A_3 \perp JA'$, $JA_3 = JA_1$ und $A'A_4 \perp KA'$, $KA_4 = KA_2$, so wird $\angle\, A_3JA' = \angle\, c$ und $\angle\, A_4KA' = \angle\, b$. Dann ist $A_3A' = A_4A'$, nämlich $= AA'$.

Um endlich $\angle\, a$ zu ermitteln, ziehen wir in den Ebenen B und Γ die Geraden AL und $AM \perp a$ bezw. bis c und b, in der Umlegung also $A_1L \perp a_1$, $A_2M \perp a_2$. Konstruieren wir von dem Dreieck LMA die Umlegung LMA_5, in welcher $LA_5 = LA_1$, $MA_5 = MA_2$ ist, so ergiebt sich $\angle\, a = \angle\, LA_5M$.

Die drei Seiten A, B, Γ bestimmen ein Dreikant nur dann, wenn jede von ihnen kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

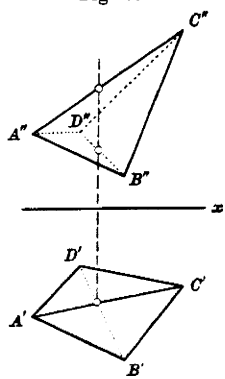
46. Aufgabe. Ein Dreikant zu konstruieren aus einer Seite A und den beiden anliegenden Winkeln b und c. Wir legen wieder A in die Zeichenebene und bestimmen die Kante a als Schnittlinie der Seitenflächen B und Γ, die durch die Kanten c und b gehen und mit der Zeichenebene die gegebenen Winkel bilden. Eine Hilfsebene, die in dem beliebigen Abstande h parallel zur Zeichenebene gelegt wird, schneidet B und Γ bezw. in den Hauptlinien $m \parallel c$ und $n \parallel b$. Um die Projektion von m zu bestimmen, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt C von c einen Normalschnitt gegen die Kante c geführt. Trifft derselbe m in P, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck $PP'C$, dessen Kathete CP' auf c senkrecht steht, $\angle PCP' = \angle c$ und die Kathete $PP' = h$. Wir erhalten also CP', d. h. den Abstand der parallelen Geraden c und m', als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem der Kathete h der Winkel c gegenüberliegt. In analoger Weise ergiebt sich die Gerade n'. Dann geht a' durch den Punkt $A' = m' \times n'$.

Um den Kantenwinkel B zu bestimmen, legen wir die Seite (a, c) um c in die Bildebene um. Fällt hierbei A nach A_1, so ist Abst. (A_1, c) gleich der Hypotenuse des vorher benutzten rechtwinkligen Dreiecks $PP'C$.

Darstellung einiger Vielflache.

47. In Fig. 3 ist ein Tetraeder $ABCD$ in Grund- und Aufriſs dargestellt. Jeder projizierende Strahl, der den Körper schneidet, enthält einen sichtbaren und einen unsichtbaren Punkt seiner Oberfläche. Das windschiefe Viereck $ABCD$, in welchem die ersten projizierenden Strahlen das Tetraeder streifen (ohne es zu schneiden), heiſst der erste wahre Umriſs und seine Grundriſsprojektion der erste scheinbare Umriſs des Körpers. Der erste wahre Umriſs trennt den im Grundriſs sichtbaren Oberflächenteil vom unsichtbaren. Von den beiden Kanten AC und BD ist AC im Grundriſs sichtbar, denn wie der Aufriſs zeigt, trifft der erste projizierende Strahl, der beide Kanten schneidet, die Gerade AC in einem Punkte, der höher liegt, als sein Schnittpunkt mit BD. — Die drei in D zusammenstoſsenden Flächen sind im Aufriſs unsichtbar; denn aus dem Grundriſs folgt, daſs D sich hinter dem Dreieck ABC befindet.

Fig. 3.

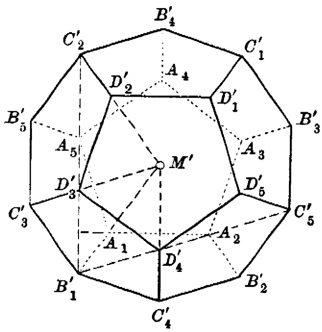


48. Aufgabe. Ein gerades Prisma in Grund- und Aufriſs darzustellen, wenn gegeben ist 1. der Eckpunkt A durch A', A'', 2. von der Grundfläche ABC die durch A gehende erste Hauptlinie m, der erste Neigungswinkel ε_1 und die Grundriſsprojektion $A'B_0'C_0'$ seiner Umlegung in die durch A gehende Horizontalebene, 3. die Länge der

Seitenkante AD. Man konstruiere zunächst die Projektionen der Grundfläche in derselben Weise wie in 44. mit Hilfe einer $\Pi_3 \perp m$. Da die Kante $AD \parallel \Pi_3$ ist, so erscheint sie in dritter Projektion in wahrer Gröfse und senkrecht auf der dritten Spurlinie der Grundfläche. Dann ist D' der Schnittpunkt der Geraden $A'D' \perp m'$ und $D'''D' \parallel m'$, ferner Abst. (D'', m'') = Abst. (D''', y').

49. Aufgabe. Ein regelmäfsiges Zwölfflach darzustellen, dessen eine Fläche $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ in Π_1 liegt (Fig. 4). Die übrigen Eckpunkte des Körpers befinden sich zu je fünf in drei horizontalen Ebenen und bilden in ihnen drei regelmäfsige Fünfecke, die wir in der Reihenfolge von unten nach oben mit $B_1 \ldots B_5$, $C_1 \ldots C_5$, $D_1 \ldots D_5$ bezeichnen. Dabei soll B_1 denjenigen der Punkte B bedeuten, der mit A_1 durch eine Kante verbunden ist. Die Punkte A und D, sowie die Punkte B und C liegen paarweise auf zehn Geraden, die sich im Mittelpunkte M des Körpers halbieren; solche Gegenecken sollen immer denselben Index erhalten. Die Punkte A und die Grundrifsprojektionen der Punkte D bilden zusammen die Ecken eines regelmäfsigen Zehnecks, und ebenso sind die Punkte B' und C' die Ecken eines zweiten regelmäfsigen Zehnecks, welches mit dem ersten parallel und konzentrisch ist. Wir bezeichnen die Radien der umgeschriebenen Kreise für das erste und zweite Zehneck bezw. mit r_1 und r_2, die Seite des ersten mit s.

Fig. 4.



Betrachten wir die Grundfläche $A_1 \ldots A_5$ als gegeben, so ist zur Bestimmung der Grundrifsprojektion des Zwölfflachs ein Eckpunkt des zweiten Zehnecks, z. B. B'_1, erforderlich. Drehen wir nun das Fünfeck $A_1 B_1 C_4 B_2 A_2$ um $A_1 A_2$, bis es mit der Grundfläche zusammenfällt, so gelangt B_1 nach A_5; B'_1 liegt folglich auf dem Lot von A_5 auf $A_1 A_2$, und ebenso ist $A_2 B'_1 \perp A_1 A_5$. — Noch genauer erhalten wir B'_1 durch folgende Überlegung: Die vier Punkte B'_1, D'_3, A_5, C'_2 liegen auf einer Parallelen zu $M'D'_4$ und die Punkte B'_1, D'_4, A_2, C'_5 auf einer Parallelen zu $M'D'_3$. Das Viereck $M'D'_3 B'_1 D'_4$ ist folglich ein Rhombus; es ist also $D'_3 B'_1 = r_1$, und die Strecke $M'B'_1$ wird von $D'_3 D'_4$ senkrecht halbiert. Ferner ist $A_1 D'_3 \parallel M'C'_2$, also $\triangle B'_1 A_1 D'_3 \sim \triangle B'_1 M' C'_2$, mithin $\triangle B'_1 A_1 D'_3$ gleichschenklig und $A_1 B'_1 = s$. Hieraus folgt noch $r_2 = r_1 + s$.

Um die Aufrifsprojektion zu konstruieren, brauchen wir nur noch die Entfernungen der Punkte B und C von Π_1 zu bestimmen. Bezeichnen wir sie bezw. mit h und i, so ist der erste Tafelabstand der Punkte $D = h + i$. — Da die Bildstrecken $A_5 C'_2$ und $A_5 B'_1$ auf $A_5 A_3$ senkrecht stehen, so sind auch die Originalstrecken $A_5 C_2$ und $A_5 B_1$ senkrecht auf $A_5 A_3$ (28). Wir schliefsen hieraus allgemein, dafs von den sechs Diagonalen der Seitenflächen, die von einer Ecke ausgehen, je zwei auf einander senkrecht sind, die durch eine Diagonale getrennt werden. Daher steht auch $A_5 C_2 \perp A_5 B_1$, und da beide Strecken einander gleich sind, so ist $\varDelta A_5 B_1 B_1' \cong \varDelta C_2 A_5 C_2'$, folglich $B_1 B_1' = A_5 C_2'$ und $C_2 C_2' = A_5 B_1'$. Nun ist aber $A_5 C_2' = D_3' B_1' = r_1$ und $A_5 B_1' = A_5 D_3' + D_3' B_1' = s + r_1 = r_2$, mithin ergiebt sich $h = r_1$ und $i = r_2$.

Aufgabe. Man konstruiere von dem dargestellten Zwölfflach die schiefe Projektion auf die Π_2.

Bezüglich weiterer Aufgaben über regelmäfsige Vielflache vergl. u. a. die Lehrbücher der darstellenden Geometrie von Wiener (I, S. 128) und Rohn und Papperitz (I, S. 99).

Schnitt eines Vielflachs mit einer Ebene.

50. Man konstruiert den Schnitt eines Vielflachs mit einer Ebene E im allgemeinen in der Weise, dafs man die Schnittpunkte seiner Kanten mit E, also die Eckpunkte der Schnittfigur, ermittelt (Kantenverfahren). Dabei kommen naturgemäfs nur solche Schnittpunkte in Betracht, die innerhalb der begrenzten Kante liegen.

Um die Schnittpunkte der einzelnen Kanten mit E zu bestimmen, bedient man sich entweder der projizierenden Ebenen dieser Kanten (26, 27), oder man benutzt eine Π_3, die auf E und auf einer der beiden ersten Projektionsebenen, mithin auf der betreffenden Spur von E senkrecht steht. In diesem Falle konstruiert man also die dritte Projektion des Körpers (11) und die dritte Spur von E und erhält auf ihr unmittelbar die dritte Projektion der Schnittfigur (43).

51. Aufgabe. Das Netz eines schiefen Prismas zu konstruieren, dessen Grundfläche $A_1 B_1 C_1$ in Π_1 liegt. Die Seitenflächen des Prismas sind Parallelogramme, deren wahre Gröfse aus je zwei Seiten und einer Diagonale leicht gefunden wird (18). Vorzuziehen ist jedoch die Anwendung eines Normalschnitts: Man lege eine Ebene N senkrecht gegen die Seitenkante $A_1 A_2$ (Spurlinie $n_1 \perp A_1 A_2'$) und bestimme ihren Schnitt $A_3 B_3 C_3$ mit dem Prisma mittels der dritten Projektion auf eine $\Pi_3 \perp n_1$. [Projektionsachse $y \perp n_1$, $A_1 A_1'''$ und $A_2' A_2''' \perp y$, Abst. $(A_2''', y) =$ Abst. (A_2'', x). $n_3 \perp A_1''' A_2'''$ enthält die Punkte A_3''', B_3''', C_3'''.] Ferner konstruiere man die wahre Gröfse des Normalschnitts durch Umlegung der N in Π_1; dabei fällt A_3 nach A_3^0 auf $A_1 A_2'$, und es ist Abst. (A_3^0, n_1) gleich der Entfernung des Punktes A_3''' vom Punkte $n_3 \times y$.

Da die Seiten des Normalschnitts auf den Seitenkanten des Prismas senkrecht stehen, so verwandelt sich jener bei der Abwickelung des Prismas in eine Gerade mit den Teilstrecken $A_3 B_3 = A_3^0 B_3^0$ u. s. w. Die Seitenkanten sind $\parallel \Pi_3$; sie erscheinen daher in dritter Projektion in wahrer Gröfse; man mache also im Netz $A_3 A_1 \perp A_3 B_3$ und $= A_3''' A_1'''$. — Kontrolle: die mit $A_1 B_1$ bezeichneten Strecken in Netz und Grundrifs müssen übereinstimmen.

52. Zur Bestimmung der ebenen Schnitte von Prismen und Pyramiden kann aufser dem allgemein giltigen Kantenverfahren noch das Flächenverfahren benutzt werden, welches unmittelbar die Schnittlinien der Ebene mit den Flächen des Körpers, also Seiten der Schnittfigur, liefert:

Aufgabe. Den Schnitt der Ebene $\mathsf{E}\,(e_1, e_2)$ mit einer Pyramide zu konstruieren, deren Grundfläche $ABCDE$ in Π_1 liegt. Man lege durch die Spitze S der Pyramide eine Hilfsebene $\Sigma \parallel \Pi_1$. Diese schneidet E in einer ersten Hauptlinie m ($m' \parallel e_1$) und die Seitenfläche SAB in der Geraden $SW \parallel AB$. Sind V und W bezw. die Schnittpunkte von AB und e_1, sowie von SW und m, so ist VW die Schnittlinie der Ebenen SAB und E; die Kanten SA und SB begrenzen auf ihr die Seite A_1B_1 der Schnittfigur.

Die Figuren $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ stehen in folgender Beziehung: Die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt (S), und die Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer Geraden (e_1). Solche Figuren heifsen perspektiv kollinear für S als Kollineationscentrum und e_1 als Kollineationsachse.

Die wahre Gröfse der Schnittfigur ergiebt sich nach 43 (erste Lösung) durch Umlegung in Π_1.

Um das Netz der Pyramide zu konstruieren, bestimmt man zunächst die wahren Längen der Seitenkanten und der auf ihnen liegenden Abschnitte, indem man auf x z. B. die Strecke $S_x A_0 = S'A$ macht und $A_1'' A_{10} \parallel x$ bis $S'' A_0$ zieht, und zeichnet dann das Dreieck SAB aus seinen drei Seiten, heftet an SB das Dreieck SBC u. s. w. Man kann aber auch jede Seitenfläche einzeln um ihre Grundkante in Π_1 umlegen (35).

Durchdringung zweier Vielflache.

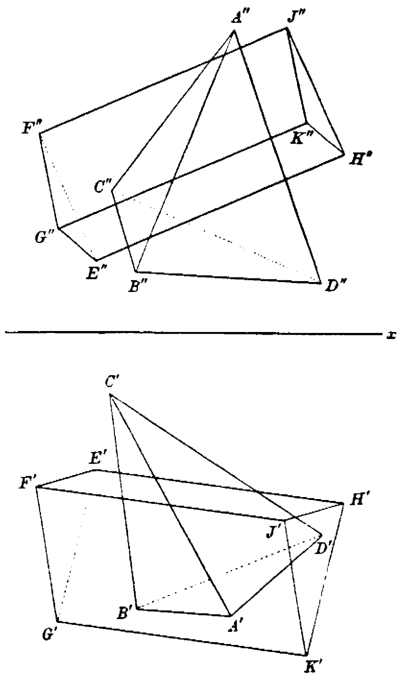
53. Zwei Vielflache durchschneiden sich entweder in einem oder in mehreren (ebenen oder windschiefen) Vielecken. Im ersten Falle sagt man, die Vielflache dringen in einander ein, im zweiten spricht man von einer vollständigen Durchdringung (Durchbohrung) des einen Vielflachs durch das andere.

Um die Durchdringungsfigur zu konstruieren, bestimmt man in der Regel zunächst ihre Ecken als die Schnittpunkte der unverlängerten Kanten des einen Vielflachs mit den unerweiterten Flächen des anderen und verbindet dann immer zwei solche Eckpunkte miteinander, die in jedem Vielflach derselben Fläche angehören (Kantenverfahren). In gewissen Fällen findet man aber auch unmittelbar die Seiten der gesuchten Figur als die Schnittlinien der Flächen des einen Vielflachs mit den Flächen des anderen (Flächenverfahren).

Bei Anwendung des Kantenverfahrens legt man durch die einzelnen Kanten geeignete Hilfsebenen und ermittelt für jede solche Ebene ihren Schnitt mit dem anderen Vielflach und hierauf die Punkte, in denen die betreffende Kante das so erhaltene Vieleck schneidet. Als Hilfsebenen dienen im allgemeinen die projizierenden Ebenen der Kanten.

54. Aufgabe. Die Durchdringung des Tetraeders $ABCD$ mit dem dreiseitigen Prisma $EFGHJK$ zu konstruieren (Fig. 5). Wir lösen die Aufgabe nach dem Kantenverfahren mittels projizierender Ebenen durch die einzelnen Kanten. Um z. B. die Schnittpunkte der Tetraederkante AB mit dem Prisma zu bestimmen, benutzen wir die zweite projizierende Ebene von AB. Diese schneidet die Prismakanten EH, FJ, GK bezw. in den Punkten 1, 2, 3. ($1'' = A''B'' \times E''H''$ u. s. w.) Die Strecke $A'B'$ hat mit den Seiten $2'3'$ und $3'1'$ des Dreiecks $1'2'3'$ bezw. die Punkte L' und M' gemein; die Kante AB durchstöfst also die Prismaflächen $FGKJ$ und $GEHK$ bezw. in L und M. — In derselben Weise verfahren wir der Reihe nach mit allen Tetraeder- und Prismakanten, diejenigen ausgenommen, bei denen die blofse Anschauung zeigt, dafs sie ganz aufserhalb des anderen Vielflachs liegen.

Fig. 5.



Wir haben schliefslich unter den gefundenen Schnittpunkten immer je zwei, die auf derselben Tetraederfläche und zugleich auf derselben Prismafläche liegen, zu einer Seite der Schnittfigur zu verbinden. Dazu bedienen wir uns zweckmäfsig einer Tabelle, in der wir neben jedem Schnittpunkte die Flächen notieren, in denen er sich befindet:

Punkte	Prismaflächen	Tetraederflächen
L	$FGKJ$	ABC, ABD

u. s. w.

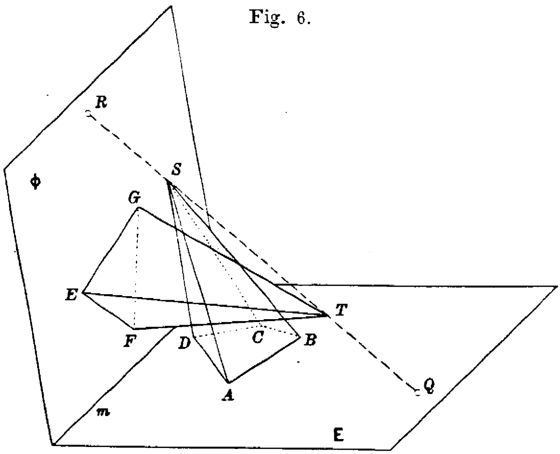
Bei diesem Verfahren kann es sich ereignen, dafs die projizierende Ebene, die wir durch eine bestimmte Kante (z. B. FJ) legen, den anderen Körper in einem Vieleck schneidet, das von der Kante gar nicht getroffen wird; dann zeigt sich erst hierdurch, dafs die betrachtete Kante überhaupt keinen Eckpunkt der Durchdringungsfigur enthält. Um solche erfolglose Versuche zu vermeiden, können wir, nachdem für eine Kante, etwa AB, wie vorhin die Schnittpunkte L und M bestimmt sind, in folgender Weise vorgehen. Da der Punkt M in der Prismafläche $GEHK$ und in der Tetraederfläche ABC liegt, so beginnt in ihm die Schnittlinie dieser Flächen, und wir finden sie, indem wir noch eine Kante der einen Fläche mit der anderen zum Schnitt bringen. Benutzen wir hierzu z. B. die Kante EH und konstruieren nach 27 ihren Schnittpunkt W mit der Ebene ABC, so ergiebt sich MW als Schnittlinie beider Flächen. Diese gehört aber der Durchdringungsfigur nur so weit an, als sie sich innerhalb des Dreiecks ABC befindet, also bis zu ihrem Schnittpunkte S mit der Kante BC. Da BC auch im Dreieck BCD liegt, so beginnt in S die Schnittlinie dieser Fläche mit $GEHK$, von der wir wieder einen zweiten Punkt ermitteln, u. s. w. Auf diese Weise erhalten wir die Eckpunkte der Durchdringungsfigur sofort in der richtigen Reihenfolge, so dafs die Anlegung einer Tabelle überflüssig wird.

Die Projektion einer Seite der Durchdringungsfigur ist als sichtbar auszuziehen, wenn beide Flächen, deren Schnittlinie sie ist, in der betreffenden Projektion sichtbar sind.

Kontrollen: Die beiden Schnittlinien einer Fläche des einen Körpers mit zwei in einer Kante zusammenhängenden Flächen des anderen treffen sich immer auf dieser Kante.

55. Handelt es sich um die Durchdringung zweier Pyramiden, so können wir die Konstruktion nach dem Kantenverfahren dadurch vereinfachen, dafs wir an Stelle der bisher benutzten projizierenden

Fig. 6.



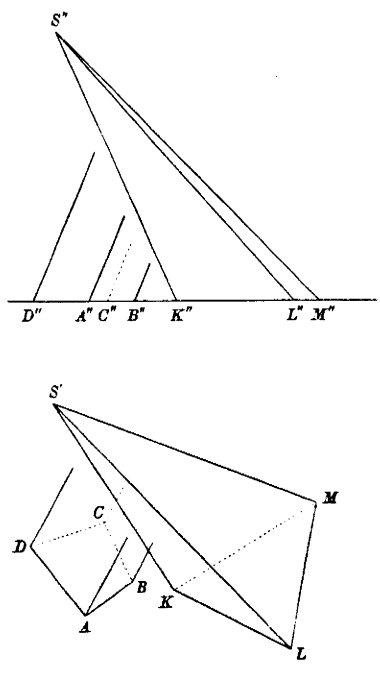
Ebenen zweckmäfsiger gewählte Hilfsebenen verwenden. Bei einer Pyramide werden nämlich die einfachsten Schnitte durch solche Ebenen erzeugt, die durch die Spitze gehen, denn diese schneiden die Mantelfläche in Geraden aus der Spitze. Um daher die Schnittpunkte der Kanten der einen Pyramide mit der anderen zu konstruieren, legen wir durch jede Kante eine Hilfsebene, die zugleich die Spitze der anderen Pyramide enthält, d. h. wir benutzen **Hilfsebenen durch die Verbindungslinie beider Spitzen.**

Sind S und T die Spitzen der beiden Pyramiden, $ABCD$ und EFG bezw. die zugehörigen Grundflächen in den Ebenen E und Φ, so bestimmen wir zunächst die Schnittlinie m diesen Ebenen, sowie die Schnittpunkte Q und R der Geraden ST mit E und Φ (Fig. 6). Dann erhalten wir z. B. die Schnittpunkte A_1 und A_2 der Kante SA mit der anderen Pyramide, indem wir durch SA und ST eine Hilfsebene legen. Diese schneidet E in QA, m in $\mathfrak{A}$ (auf QA), Φ in $\mathfrak{A}R$, das Dreieck EFG in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ (auf $\mathfrak{A}R$), also den Mantel der zweiten Pyramide in den Geraden $\mathfrak{A}_1 T$ und $\mathfrak{A}_2 T$, welche auf SA die Punkte A_1 und A_2 bestimmen. Haben wir in derselben Weise alle übrigen Eckpunkte der Durchdringungsfigur gefunden, so erkennen wir ihre Reihenfolge ohne Benutzung einer Tabelle, indem wir von A und $\mathfrak{A}_1$ aus beide Grundflächen derartig umfahren, dafs die in ihnen gleichzeitig erreichten Punkte immer in derselben Hilfsebene liegen.

Rückt der Punkt T in unendliche Entfernung, so verwandelt sich die zugehörige Pyramide in ein **Prisma.** Dann bleibt die vorige Konstruktion ungeändert, nur werden die Geraden ST, $\mathfrak{A}_1 T$, $\mathfrak{A}_2 T \ldots$ parallel zu den Seitenkanten des Prismas.

Nach ganz demselben Verfahren ermitteln wir endlich auch die **Durchdringung zweier Prismen,** indem wir durch die Seitenkanten jedes Prismas Hilfsebenen legen parallel zu denen des anderen (22 c). Alle diese Ebenen schneiden E und Φ in parallelen Geraden.

Fig. 7.



56. Aufgabe. Die Durchdringung eines Prismas mit einer Pyramide zu konstruieren, wenn die zugehörigen Grundflächen $ABCD$ und KLM in Π_1 liegen (Fig. 7).

Erste Lösung (Kantenverfahren): Wir ziehen durch die Spitze S der Pyramide parallel zu den Seitenkanten des Prismas die Gerade SQ bis Π_1 und konstruieren dann genau so, wie in 55. angegeben wurde.

Zweite Lösung (Flächenverfahren, vergl. 52): Eine horizontale Ebene durch S schneidet das Prisma in einem Viereck $EFGH$, das zu $ABCD$ parallel und kongruent ist, und die Seitenflächen der Pyramide in drei durch S gehenden Geraden $p \parallel KL$, $q \parallel LM$, $r \parallel MK$. Um z. B. die Schnittlinie der Flächen $ABFE$ und SKL zu ermitteln, bestimmen wir die Punkte $T = AB \times KL$ und $U = EF \times p$; dann ist TU die gesuchte Schnittlinie, die aber als Seite der Durchdringungsfigur nur soweit in Betracht kommt, als sie innerhalb der begrenzten Seitenflächen liegt, also von ihrem Schnittpunkte A_1 mit AE bis K_1 auf SK. In A_1 wird sich die Schnittlinie der Flächen $ADHE$ und SKL anschliefsen u. s. w.

Soll die Seite $A_1 K_1$ der Durchdringungsfigur in das Netz der Pyramide eingetragen werden, so benutzen wir wieder die Punkte T auf KL und U auf p ($SU \parallel KL$ und $= S'U'$).

Schattenkonstruktionen.

57. Um die Anschaulichkeit der Abbildung zu erhöhen, denken wir uns die dargestellten Objekte aus einem endlichen oder unendlich fernen Punkte L beleuchtet. Während in Bezug auf L als Projektionscentrum (Auge) die Oberfläche jedes undurchsichtigen Körpers in einen sichtbaren und einen unsichtbaren Teil zerfällt, die durch den wahren Umrifs getrennt werden, unterscheiden wir für L als Lichtquelle diese beiden Oberflächenteile als den beleuchteten und den im Eigen- oder Selbstschatten befindlichen Teil und bezeichnen ihre Trennungslinie, in deren Punkten die Lichtstrahlen die Oberfläche streifen (berühren), als Eigen- oder Selbstschattengrenze (Lichtgrenze). Die streifenden Lichtstrahlen umschliefsen hinter dem Körper seinen Schattenraum. Jede Oberfläche, die in diesen Raum hineinreicht, empfängt vom Körper einen Schlagschatten, dessen Grenzlinie von jenen streifenden Lichtstrahlen ausgeschnitten wird. Die Schlagschattengrenze ist also die Projektion der Eigenschattengrenze aus L und geometrisch dasfelbe, wie der scheinbare Umrifs des Körpers für L als Projektionscentrum.

Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, werden wir im folgenden immer voraussetzen, der Punkt L sei unendlich fern. Wir wählen ferner die parallelen Lichtstrahlen immer so, dafs sie von links oben und vorn nach rechts unten und hinten gerichtet sind, und zwar zumeist parallel zur Diagonale eines Würfels, von welchem drei Kanten mit den Projektionsachsen x, y, z zusammenfallen. Diese bevorzugte Lichtrichtung soll kurz als „Richtung der Würfeldiagonale“ bezeichnet werden.

58. Aufgabe. Bei gegebener Lichtrichtung $l\,(l', l'')$ den Schlagschatten zu bestimmen, den der Punkt $P(P', P'')$ auf eine der Projektionsebenen wirft. Der Schlagschatten von P auf Π_1 oder Π_2 ist bezw. der erste oder zweite Spurpunkt des durch P gehenden Lichtstrahls (15); wir bezeichnen ihn im folgenden immer bezw. mit P_h oder P_v. Da die Projektionsebenen als unbegrenzt und undurchsichtig vorausgesetzt werden, so werfen zufolge der über die Lichtrichtung getroffenen Annahme (57) nur die im ersten Quadranten liegenden Punkte Schatten, und zwar entweder auf die $+\Pi_1$ oder die $+\Pi_2$. Für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale ist $P_h P_v \parallel x$.

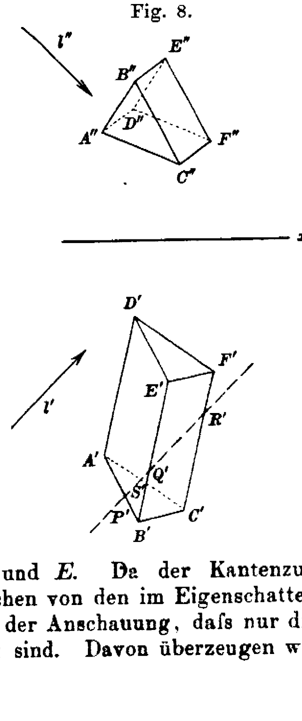
59. Aufgabe. Den Schlagschatten der Strecke AB auf die Projektionsebenen zu konstruieren. Man konstruiere von den Endpunkten A und B den Schatten A_h und B_h auf Π_1. Liegt A_h oberhalb, B_h unterhalb x und schneidet $A_h B_h$ die Achse in C, so ist der Schatten von AB die gebrochene Linie $A_v C B_h$.

Ist $AB \parallel$ oder $\perp \Pi_1$, so wird $A_h B_h$ bezw. $\#AB$ oder $\parallel l'$.

60. Um zu entscheiden, ob von einer ebenen Figur, etwa von einem Dreieck ABC, im Grundrifs die beleuchtete oder die im Eigenschatten befindliche Seite gesehen wird, schneiden wir die Figur mit einer Ebene, die zur ersten projizierenden Ebene des Lichtstrahls l parallel ist, in einer Geraden DE ($D'E' \parallel l'$). Dann zeigt sich im Aufrifs, ob die in der Hilfsebene verlaufenden ersten projizierenden Strahlen und die in ihr liegenden Lichtstrahlen dieselbe Seite von DE treffen, oder nicht. Im ersten Falle ist die im Grundrifs sichtbare Seite der Ebene ABC beleuchtet. Konstruieren wir den Schlagschatten auf Π_1, so sind in diesem Falle die Dreiecke $A'B'C'$ und $A_h B_h C_h$ gleichen Sinnes (20).

61. Aufgabe. Den Schlagschatten des Prismas $ABCDEF$ auf die Projektionsebenen, sowie seinen Eigenschatten zu bestimmen (Fig. 8). Wir konstruieren zunächst den vollständigen Schlagschatten auf die Π_1, so wie er sich gestalten würde, wenn die Π_2 durchsichtig wäre. Haben wir von den durch A, B, C, D gezogenen Lichtstrahlen die ersten Spurpunkte $A_h \ldots$ ermittelt, so ergeben sich E_h und F_h sofort aus der Bemerkung, dafs $B_h E_h$ und $C_h F_h \# A_h D_h$ sind. Denken wir uns nunmehr die Schatten aller derjenigen Eckpunkte verbunden, die auf dem Prisma selbst durch Kanten verbunden sind, so erhalten wir als Schlagschattengrenze das Fünfeck $A_h C_h B_h E_h D_h$, das alle übrigen Verbindungslinien einschliefst, und diesem entspricht auf dem Prisma die Eigenschattengrenze $ACBED$. Dafs übrigens die Punkte C und D der Eigenschattengrenze angehören, ist ohne weiteres klar, weil in C' und D' der erste scheinbare Umrifs von je einer Parallelen zu l' gestreift wird, und das Analoge gilt im Aufrifs von A und E. Da der Kantenzug $ACBEDA$ die beleuchteten Prismaflächen von den im Eigenschatten befindlichen trennt, so ergiebt sich aus der Anschauung, dafs nur die Flächen ABC und $ABED$ beleuchtet sind. Davon überzeugen wir

Fig. 8.



uns auch, indem wir das Prisma mit einer Hilfsebene schneiden, die zur ersten projizierenden Ebene von l parallel ist. Die so erhaltene Schnittfigur $PQRS$ wird von den durch Q und S gehenden Lichtstrahlen gestreift, und die in ABC und $ABED$ liegenden Seiten SP und PQ sind dem Lichte zugewendet.

Die Punkte D und E werfen ihren Schlagschatten in Wirklichkeit nicht auf die Π_1, sondern auf die Π_2; der Schlagschatten des Prismas wird also in den Schnittpunkten M und N von $A_h D_h$ und $B_h E_h$ mit x gebrochen. Die Figuren $M D_h E_h N$ und $M D_v E_v N$ sind perspektiv affin für x als Affinitätsachse.

62. Um den Schlagschatten einer Figur auf eine andere Figur zu bestimmen, können wir zwei verschiedene Wege einschlagen:

I. Wir bestimmen unmittelbar die Schnittpunkte der von den Schatten werfenden Punkten ausgehenden Lichtstrahlen mit den Schatten empfangenden Flächen unter Anwendung geeigneter Hilfsebenen, in der Regel mittels projizierender Ebenen durch die einzelnen Lichtstrahlen. (Direktes Verfahren, insbesondere Methode der projizierenden Ebenen, analog dem Kantenverfahren bei Durchdringungen, vergl. 53.)

II. Sind a und b zwei gerade (oder krumme) Linien im Raume, a_h und b_h ihre Schatten auf irgend eine Ebene, etwa auf die Π_1, und treffen sich a_h und b_h in einem Punkte P_h, so ist dieser der Schatten sowohl eines Punktes von a als auch eines Punktes von b, d. h. der durch P_h rückwärts gezogene Lichtstrahl schneidet beide Linien. Trifft er zuerst a in P, hierauf b in Q, so empfängt a in P Schlagschatten vom Punkte Q auf b. — Um hiernach den Schlagschatten zu konstruieren, den das Vielflach A vom Vielflach B empfängt, ermitteln wir zunächst den Schlagschatten beider Vielflache auf die Π_1. Da nur die beleuchteten Flächen von A Schatten erhalten, und da die Grenzlinie dieses Schattens von der Eigenschattengrenze auf B herrührt, so suchen wir in Π_1 die Schnittpunkte der Schlagschattengrenze von B mit den Schatten der beleuchteten Kanten von A (einschliefslich der Schlagschattengrenze von A) und projizieren die gefundenen Punkte in der Lichtrichtung auf die betreffenden Kanten von A. (Indirektes Verfahren, Methode des Zurückprojizierens.)

IV. Der Kreis.

63. Sei E irgend eine Originalebene, k eine in ihr liegende Kurve, k' die senkrechte oder schiefe Parallelprojektion von k auf die Ebene Π, so sind k und k' perspektiv affin für die Spurlinie e von E als Affinitätsachse (40). Dabei entspricht der Tangente in einem Punkte P von k die Tangente im Punkte P' von k', denn beide Geraden sind die Verbindungslinien entsprechender Paare von unendlich benachbarten Punkten auf k und k'.

Den Schnittpunkten von k mit einer in E liegenden Geraden g sind der Reihe nach die Schnittpunkte von k' mit der Bildgeraden g'

zugeordnet; daraus folgt: Die Projektion einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung ist wieder von der n^{ten} Ordnung.

64. Ist die Kurve k ein Kreis, so entsteht als Bildkurve k' eine im Endlichen geschlossene Kurve zweiter Ordnung, d. h. die Parallelprojektion des Kreises ist im allgemeinen eine Ellipse.

Die Projektion M' des Kreismittelpunktes M ist der Mittelpunkt der Bildellipse; denn M' ist der Mittelpunkt der Projektionen aller Kreisdurchmesser (1). Zieht man in k zwei auf einander senkrechte Durchmesser, so ist jeder von ihnen parallel zu den Tangenten in den Endpunkten des anderen. Dann gilt dafselbe von den entsprechenden Durchmessern von k', d. h.: Zwei auf einander senkrechten Kreisdurchmessern entsprechen zwei konjugierte Ellipsendurchmesser.

65. Aufgabe. Von dem Kreise k ist die Spur e seiner Ebene, seine Umlegung k_0 in die Bildebene Π und von seinem Mittelpunkte M das Bild M' gegeben; die Achsen der Bildellipse k' zu konstruieren. Man bestimme den Schnittpunkt O von e mit der Mittelsenkrechten von $M_0 M'$, beschreibe um O mit dem Radius $O M_0$ einen Kreis, der e in V und W schneidet, und ziehe in k_0 die nach V und W gehenden Durchmesser $A_0 B_0$ und $C_0 D_0$. Ihnen entsprechen in der perspektiv affinen Figur auf $M'V$ und $M'W$ die Achsen $A'B'$ und $C'D'$ von k'; denn $A'B'$ und $C'D'$ sind zwei auf einander senkrechte, konjugierte Durchmesser der Bildellipse.

Im Falle senkrechter Projektion ist $M_0 M' \perp e$; dann ist die grofse Achse von $k' \parallel e$ und gleich dem Durchmesser von k_0.

66. Sind von der Ellipse k zwei konjugierte Durchmesser AB und CD gegeben, und beschreibt man über dem einen derselben, z. B. über AB, um den Mittelpunkt M von k den Kreis k_0, so kann man k als die perspektiv affine Kurve zu k_0 betrachten für AB als Affinitätsachse. Dabei entspricht dem Ellipsendurchmesser CD der auf AB senkrechte Kreisdurchmesser $C_0 D_0$; die Affinitätsstrahlen sind also $\parallel C_0 C$. Hieraus ergiebt sich die folgende Konstruktion der Ellipse k: Man fälle von einem beliebigen Punkte P_0 von k_0 auf AB das Lot $P_0 Q$ und ziehe $QP \parallel MC$ und $P_0 P \parallel C_0 C$; dann ist P ein Punkt von k, denn der zu k_0 gehörenden Geraden $P_0 Q$ entspricht in der affinen Figur die Gerade PQ.

Die Ellipsentangente in P geht durch den Schnittpunkt der Kreistangente in P_0 mit der Affinitätsachse AB.

Die affine Beziehung zwischen der Ellipse k und dem Kreise k_0 liefert ein bequemes Mittel, um eine Reihe von Konstruktionsaufgaben über die Ellipse durch Zurückführung auf die analoge Aufgabe am Kreise zu lösen. Sollen z. B. an die durch zwei konjugierte Durchmesser AB und CD gegebene, aber nicht gezeichnete Ellipse k aus einem beliebigen Punkte R der Ebene Tangenten gezogen werden, so konstruiere man zu R den in der Kreisfigur entsprechenden Punkt R_0 ($RS \parallel CM$ bis AB, $SR_0 \perp AB$, $RR_0 \parallel CC_0$), lege aus R_0 an den Kreis k_0 die Tangenten und verbinde R mit den Punkten, in denen jene die Affinitätsachse AB schneiden.

67. Konstruktion der Ellipse aus ihren Achsen $AB = 2a$ und $CD = 2b$ $(a > b)$. Die Ellipse k ist wieder perspektiv affin zu dem Kreise, der AB zum Durchmesser hat; wir bezeichnen ihn gegenwärtig mit k_1. Dem Punkte C von k entspricht der Schnittpunkt C_1 von k_1 mit der verlängerten Halbachse MC; einem beliebigen Punkte P_1 von k_1 ist also nach 66. derjenige Punkt P von k zugeordnet, der die auf AB senkrechte Strecke $P_1 Q$ in demselben Verhältnis teilt, wie C die Strecke $C_1 M$. Beschreiben wir daher um M mit dem Radius MC den Kreis k_2, der MP_1 in P_2 schneidet, so erhalten wir P als Schnittpunkt von $P_1 Q$ mit der Parallele durch P_2 zu AB.

Verstehen wir unter k_3 den Kreis um M mit dem Radius $a + b$, unter P_3 seinen Schnittpunkt mit MP_1, so ist PP_3 die Normale der Ellipse in P. Denn die Tangente von k in P geht durch den Schnittpunkt V von AB mit der Tangente von k_1 in P_1; dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $P_1 P P_2$ und $V P_1 M$, dafs auch die Dreiecke PP_2P_3 und PP_1V einander ähnlich sind, mithin ist $\angle P_3 P P_2 = \angle VPP_1$, also $\angle VPP_3 = 90^0$.

Sind R und S die Schnittpunkte von AB und CD mit der Parallele durch P zu MP_1, so ist $PR = b$, $PS = a$. Gleitet daher die Strecke $RS = a - b$ mit den Punkten R und S auf den Achsen AB und CD, so beschreibt der auf ihrer Verlängerung liegende Punkt P die Ellipse. — Machen wir ferner auf AB die Strecke $QT = RQ$ und ziehen TP bis U auf CD, so wird $PU = a$, $PT = b$; die Ellipse entsteht also auch als Bahnkurve von P, wenn die Endpunkte der Strecke $TU = a + b$ sich bezw. auf AB und CD bewegen. (Papierstreifenkonstruktionen der Ellipse.)

Hieraus folgt beiläufig: Kennen wir von einer Ellipse die eine Achse $AB = 2a$ und einen beliebigen Punkt P, so finden wir die Länge b der anderen Halbachse, indem wir um P mit a einen Kreisbogen beschreiben. Trifft dieser die nicht gegebene Achse in S, und schneiden sich PS und AB in R, so ist $PR = b$.

Um die Ellipse möglichst genau zu zeichnen, benutzen wir noch ihre Scheitelkrümmungskreise. Bilden wir das Rechteck $AMCE$ und fällen von E auf AC ein Lot, so trifft dieses AB und CD bezw. in den Krümmungsmittelpunkten F und G der Scheitel A und C. Dann ist nämlich $AF = \frac{b^2}{a}$ und $CG = \frac{a^2}{b}$ in Übereinstimmung mit bekannten Formeln der analytischen Geometrie.

68. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser. Wir bezeichnen wieder mit M den Mittelpunkt, mit AB und CD die Achsen einer Ellipse k, mit k_1 und k_2 die Kreise über den Durchmessern AB und CD. In k_1 wählen wir irgend zwei auf einander senkrechte Radien ME_1 und MG_1, schneiden sie mit k_2 in E_2 und G_2 und bestimmen nach 67. zu E_1 und G_1 die entsprechenden Ellipsenpunkte E und G ($E_1 E \perp AB$, $E_2 E \parallel AB$ u. s. w.). Dann sind ME und MG zwei konjugierte Halbmesser von k, und es ist $\triangle E_1 E E_2 \cong \triangle G_2 G G_1$. Drehen wir $\triangle MG_1G$ um M, bis G_1 mit E_1, also G_2 mit E_2 zusammenfällt, so

gelangt MG nach $MJ \perp MG$. In dem Rechteck E_1EE_2J halbieren sich die Diagonalen in O; sind also S und T die Schnittpunkte von EJ mit AB und CD, so ist $OS = OT = OM$ und $ME_1 = JS = MA$, sowie $ME_2 = JT = MC$.

Kennen wir daher umgekehrt von der Ellipse k die konjugierten Durchmesser EF und GH, so finden wir die Achsen in folgender Weise: Wir ziehen $MJ \perp\!\!\!= MG$ und beschreiben um den Mittelpunkt O von EJ mit OM einen Kreisbogen, der EJ in S und T schneidet. Dann gehen die Achsen AB und CD bezw. durch S und T, und zwar ist $MA = JS$, $MC = JT$.

69. Aufgabe. Einen Kreis k in Grund- und Aufrifs darzustellen, wenn gegeben ist die erste Spurlinie e_1 und der erste Neigungswinkel ε_1 seiner Ebene E, die erste Projektion M' seines Mittelpunktes M und sein Radius r. Die erste Projektion von k ist eine Ellipse k' mit dem Mittelpunkte M'. Alle Durchmesser von k erscheinen im Grundrifs verkürzt, mit Ausnahme des zu e_1 parallelen Durchmessers AB, der in wahrer Gröfse abgebildet wird. Ziehen wir also durch M' die Gerade $A'B' \parallel e_1$ und machen $M'A' = M'B' = r$, so ist $A'B'$ die grofse Achse von k'. Die zugehörige kleine Achse ist die Grundrifsprojektion des auf AB senkrechten Kreisdurchmessers CD. Dieser geht durch den Fufspunkt J des Lotes von M' auf e_1 und bildet mit $M'J$ den Winkel ε_1. Durch Umlegung in Π_1 gelangt der Winkel MJM' nach $M_0JM' = \varepsilon_1$ und M nach M_0 auf $A'B'$; machen wir dann auf JM_0 die Strecke $M_0C_0 = r$, so ist $C_0C' \perp JM'$.

Die Aufrifsprojektion von k ist eine Ellipse k'' mit dem Mittelpunkte M'', wobei Abst. $(M'', x) = M'M_0$. Der zu Π_2 parallele Kreisdurchmesser EF liefert die grofse Achse von k''; um sie zu erhalten, ziehen wir $M'N \parallel x$ bis e_1, $NN'' \perp x$ und machen auf $M''N''$ die Strecke $M''E'' = M''F'' = r$. Von der Ellipse k'' kennen wir ferner den Punkt A'' auf der Parallelen durch M'' zu x; wir finden also die kleine Halbachse nach 67.

Der Schlagschatten von k auf Π_1 ist eine Ellipse k_h, die den Schatten M_h von M zum Mittelpunkte hat. Bilden wir von k die Umlegung in Π_1, so finden wir die Achsen von k_h nach 65.

V. Die Kugel.

70. Im Anschlufs an früher gebrauchte Bezeichnungen verstehen wir bei einer krummen Fläche unter wahrem Umrifs den geometrischen Ort derjenigen Flächenpunkte, deren projizierende Strahlen die Fläche berühren, unter scheinbarem Umrifs die Projektion der wahren Umrifslinie.

Darstellung einer Kugel, die durch ihren Mittelpunkt M (M', M'') und ihren Radius r gegeben ist. Der erste wahre Umrifs der Kugel ist der horizontale Hauptkreis u, der erste scheinbare Umrifs der Kreis u' um M' mit dem Radius r. Die zweite Projektion von u fällt zusammen mit dem zu x parallelen Durchmesser des zweiten scheinbaren Umrisses v''. Alle Punkte der oberhalb u liegenden Halbkugel sind im Grundrifs sichtbar.

Um von dem Punkte P der Kugelfläche, der durch seinen Grundrifs P' gegeben ist, die Aufrifsprojektion zu konstruieren, benutzen wir den durch P gehenden horizontalen Kugelkreis p. Seine Grundrifsprojektion ist der Kreis p' um M' mit dem Radius $M'P'$. Dem Punkte Q', in welchem p' die Grundrifsprojektion v' des zweiten wahren Umrisses v schneidet, entsprechen im Aufrifs zwei Punkte von v''; von den zugehörigen horizontalen Sehnen kann jede als Aufrifsprojektion von p betrachtet werden.

71. Aufgabe. Den Schnitt der Ebene E (e_1, e_2) mit einer Kugel vom Mittelpunkte M (M', M'') zu konstruieren. Die Schnittkurve ist ein Kreis k, der den Fufspunkt O des von M auf E gefällten Lotes zum Mittelpunkte hat. Wie beim ebenen Schnitt eines Vielflachs bedienen wir uns einer dritten Projektionsebene Π_3, die auf e_1 senkrecht steht und Π_1 in der Geraden $y \perp e_1$ schneidet, und bestimmen in der umgelegten Π_3 die dritte Spurlinie e_3 (43), sowie den Punkt M''' und den dritten scheinbaren Umrifs w''' der Kugel. Die auf e_3 liegende Sehne $C'''D'''$ des Kreises w''' ist die dritte Projektion und zugleich die wahre Gröfse des auf e_1 senkrechten Durchmessers von k, sowie die dritte Projektion des Schnittkreises selbst. Um die Projektionen des Mittelpunktes O zu erhalten, ziehen wir $M'''O''' \perp e_3$, $M'O' \perp e_1$, $O'''O' \parallel e_1$, $M''O'' \perp e_2$. Die Grundrifsprojektion von k ist eine Ellipse k' mit dem Mittelpunkte O', der kleinen Achse $C'D' \perp e_1$ und der grofsen Achse $A'B' = 2 \,.\, O'''C'''$. Die grosse Achse der Ellipse k'' ist $\parallel e_2$ und ebenfalls $= 2 \,.\, O'''C'''$; die zugehörige kleine Achse ergiebt sich nach 67. mittels des Punktes A'' $(O''A'' \parallel x)$.

Die Konstruktion gestaltet sich noch etwas einfacher, wenn wir die Ebene Π_3 durch M legen und sie um den in ihr befindlichen horizontalen Kugeldurchmesser drehen, bis sie $\parallel \Pi_1$ wird.

Die Ebene des ersten wahren Umrisses u schneidet E in einer ersten Hauptlinie h, und diese trifft u in T und U, den Endpunkten des im Grundrifs sichtbaren Teiles von k. Die Ellipse k' berührt den Kreis u' in T' und U', denn die Tangenten an k und u in T liegen in der Berührungsebene der Kugel in T, die auf Π_1 senkrecht steht, und deren erste Projektion mit der Tangente in T' an u' zusammenfällt. — Überhaupt gilt ganz allgemein der Satz: Liegt auf irgend einer krummen Fläche eine Kurve k, die den wahren Umrifs u in einem Punkte T schneidet, so berührt ihre Projektion k' den scheinbaren Umrifs u' in T'.

72. Aufgabe. Den Schnitt des Dreiecks ABC mit einer Kugel vom Mittelpunkte M zu konstruieren. Wir bestimmen eine hinreichende Anzahl von Punkten des Schnittkreises k, indem wir durch Kugel und Dreieck eine Reihe horizontaler Hilfsebenen legen. Eine solche Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise p, das Dreieck in einer Geraden ST, und diese trifft p im allgemeinen in zwei Punkten P und Q von k. Dabei kommen nur solche Punkte in Betracht, die innerhalb der begrenzten Dreiecksfläche liegen.

Um die Schnittpunkte D und E der Geraden AB mit der Kugel zu erhalten, schneiden wir die Kugel mit der ersten projizierenden Ebene von AB in einem Kreise i, dessen erste Projektion mit der auf $A'B'$ liegenden Sehne $F'G'$ des Umrifskreises u' zusammenfällt. Sein Mittelpunkt O ist der Fufspunkt des Lotes von M auf diese Ebene, also von Π_1 ebenso weit entfernt wie M. Legen wir die Ebene $ABB'A'$ in Π_1 um, so gelangen AB, O, i bezw. nach A_0B_0, O_0, i_0; dabei ist $A'A_0 \perp A'B'$ und $=$ Abst. (A'', x), $M'O_0 \perp A'B'$, $O'O_0$ $=$ Abst. (M'', x) und der Radius von $i_0 = O'F'$. Die Gerade A_0B_0 trifft i_0 in D_0 und E_0 u. s. w.

73. Aufgabe. Die Eigenschattengrenze einer Kugel für Parallelbeleuchtung zu konstruieren. Wir bezeichnen mit M den Mittelpunkt, mit u und v den ersten und zweiten Umrifs der Kugel, mit l den durch M gehenden Lichtstrahl. Die gesuchte Eigenschattengrenze ist ein Hauptkreis s, dessen Ebene auf l senkrecht steht, ihre erste Projektion also eine Ellipse s' mit dem Mittelpunkte M'. Da alle Durchmesser von s im Grundrifs verkürzt erscheinen, mit Ausnahme des horizontalen, also in u liegenden Durchmessers AB, so ist die auf l' senkrechte Strecke $A'B'$ die grofse Achse von s'. Die zugehörige kleine Achse ist demnach die Grundrifsprojektion desjenigen Durchmessers CD von s, der sich in der ersten projizierenden Ebene von l befindet. Diese schneidet die Kugel in einem Hauptkreise i, von welchem l und CD zwei auf einander senkrechte Durchmesser sind. Um $C'D'$ zu konstruieren, drehen wir den Kreis i um den vertikalen Kugeldurchmesser, bis er mit v zusammenfällt. Dabei beschreibt der auf l beliebig gewählte Punkt L einen horizontalen Kreisbogen bis L_0 ($M'L_0' \parallel x$ und $= M'L'$, $L''L_0'' \parallel x$). Dann ist $M''L_0''$ die Aufrifsprojektion l_0'' des gedrehten Lichtstrahles; ziehen wir also in v'' den Radius $M''C_0'' \perp l_0''$ als Aufrifsprojektion der gedrehten Strecke MC, so finden wir auf v' den Punkt C_0' und auf l' den Punkt C' ($M'C' = M'C_0'$).

Die Aufrifsprojektion von s ist eine Ellipse, die den auf l'' senkrechten Durchmesser von v'' zur grofsen Achse hat. Sie geht ferner durch den Punkt A'' auf u'', wodurch die kleine Achse nach 67. bestimmt ist.

Die Projektion der Eigenschattengrenze berührt den scheinbaren Umrifs in denjenigen Punkten, deren Tangenten zur Projektion des Lichtstrahles parallel sind. Dies gilt allgemein für jede krumme Fläche; denn trifft die Eigenschattengrenze s einer solchen Fläche den wahren Umrifs u im Punkte A, so liegen der durch A gehende Lichstrahl und die zugehörigen Tangenten von u und s in der Berührungsebene von A, und da diese auf der betreffenden Projektionsebene senkrecht steht, so fällt ihre Projektion mit der des Lichtstrahles zusammen.

Die Grenze des Schlagschattens der Kugel auf Π_1 ist der Schatten von s, also eine Ellipse s_h vom Mittelpunkte M_h. Da die Durchmesser von s auf der Lichtrichtung senkrecht stehen, so erscheinen sie im Schatten vergröfsert, mit Ausnahme des zu Π_1 parallelen Durchmessers AB. Die kleine Achse von s_h ist also $A_hB_h \,\#\, A'B'$, die grofse Achse folglich C_hD_h. Ziehen wir $C_0''N_0'' \parallel l_0''$ bis zur Parallelen durch M'' zu x, so ist $M_hC_h = M''N_0''$.

VI. Kegel- und Cylinderflächen.

Raumkurven und abwickelbare Flächen im allgemeinen. Entstehung der Kegel- und Cylinderflächen.

74. Unter der Schmiegungsebene einer Raumkurve k im Punkte P verstehen wir die Ebene Σ, die an der betrachteten Stelle drei unendlich benachbarte Punkte P, P_1, P_2 mit k gemein hat, oder die Ebene der beiden unendlich benachbarten Tangenten $t = PP_1$ und $t_1 = P_1 P_2$. Die Kurve k durchsetzt im allgemeinen die Ebene Σ im Punkte P, weil dieser aus der Vereinigung von drei auf einander folgenden Schnittpunkten hervorgeht. — In Σ befindet sich der Krümmungskreis des Punktes P, d. h. der Kreis durch P, P_1, P_2.

Verzeichnen wir auf k von P_2 aus weiter die unendlich benachbarten Punkte P_3, $P_4 \ldots$, so sind die Geraden $t_2 = P_2 P_3$, $t_3 = P_3 P_4 \ldots$ die Tangenten von k in P_2, $P_3 \ldots$, und dann bilden die unendlich schmalen ebenen Streifen, die zwischen je zwei Nachbartangenten enthalten sind, in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche, die Tangentenfläche der Raumkurve k. Sie ist abwickelbar, d. h. wir können sie ohne Trennung des Zusammenhanges und ohne Faltung in eine Ebene ausbreiten, wie sich sofort ergiebt, wenn wir den ersten Elementarstreifen $t t_1$ durch eine unendlich kleine Drehung um t_1 in die Ebene des folgenden $t_1 t_2$ bringen, dann beide vereinigt in die Ebene des dritten überführen u. s. w.

Die Tangenten der Raumkurve heifsen die Erzeugenden oder Mantellinien ihrer Tangentenfläche. Ihre Schmiegungsebenen sind die Berührungsebenen der Fläche, und zwar berührt jede die Fläche längs der zugehörigen Erzeugenden; denn jede Gerade, die z. B. in der Schmiegungsebene Σ beliebig gezogen wird, hat mit der Fläche die beiden unendlich benachbarten Punkte gemein, in denen sie t und t_1 schneidet, ist also eine Tangente der Fläche.

75. Durch Bewegung einer Geraden entsteht eine geradlinige Fläche oder Regelfläche. Bewegt sich die erzeugende Gerade so, dafs je zwei unendlich benachbarte Lagen sich schneiden, so ist die Fläche abwickelbar (74); im entgegengesetzten Falle heifst sie windschief.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine (unbegrenzte) Gerade sich so bewegt, dafs sie beständig durch einen festen Punkt S geht und eine gegebene Kurve k fortwährend schneidet. Die sämtlichen Lagen der erzeugenden Geraden heifsen Mantellinien; S wird die Spitze oder der Mittelpunkt, k die Leitkurve der Kegelfläche genannt.

Rückt der Punkt S in unendliche Entfernung, bleibt also die Erzeugende zu ihrer Anfangslage parallel, so verwandelt sich die Kegelfläche in eine Cylinderfläche.

Jede Kegel- oder Cylinderfläche kann als Mantel einer Pyramide bezw. eines Prismas mit unendlich vielen, unendlich schmalen Seitenflächen aufgefafst werden. Sie ist also abwickelbar und wird von jeder Berührungsebene in allen Punkten einer Mantellinie berührt. Aus dieser Auffassung ergiebt sich ferner: **Alle Parallelschnitte einer Kegelfläche sind einander ähnlich. Alle Parallelschnitte einer Cylinderfläche sind kongruent.**

Darstellung der Cylinder- und Kegelflächen. Berührungsebenen u. s. w.

76. Darstellung eines schiefen Kreiscylinders, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt und dessen Mantellinien parallel sind zu einer durch den Mittelpunkt M von k gehenden Geraden a. Die Mantellinien, deren Berührungsebenen auf Π_1 senkrecht stehen, bilden den ersten wahren Umrifs; ihre Grundrifsprojektionen sind Tangenten an $k \parallel a'$. Die zweiten Umrifsmantellinien gehen durch die Endpunkte des zu x parallelen Durchmessers von k.

Um zu einem Punkte P der Cylinderfläche, von welchem die Grundrifsprojektion P' gegeben ist, die Aufrifsprojektion zu ermitteln, ziehen wir durch P' die Gerade $p' \parallel a'$ und zeichnen im Aufrifs die beiden Mantellinien, deren Grundrifsprojektionen mit p' zusammenfallen.

Aufgabe. An den dargestellten Cylinder Berührungsebenen zu legen, parallel zu einer gegebenen Geraden l. Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt S von a die Gerade $ST \parallel l$ bis Π_1, so sind die gesuchten Berührungsebenen E und Φ parallel zur Ebene MST; ihre ersten Spurlinien e_1 und f_1 sind also die zu MT parallelen Tangenten von k. Durch die Berührungspunkte derselben gehen die Berührungsmantellinien g und h. — Für Licht in der Richtung l sind g und h die Grenzen des Eigenschattens, e_1 und f_1 diejenigen des Schlagschattens auf Π_1.

77. Darstellung eines schiefen Kreiskegels, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Ist S die Spitze des Kegels, so besteht sein erster scheinbarer Umrifs aus den Tangenten von S' an k. Dieser Umrifs ist also nicht vorhanden, wenn S' innerhalb k liegt; dann hat der Kegel keine auf Π_1 senkrechten Berührungsebenen.

Die Berührungsebenen des Kegels aus dem gegebenen Punkte L gehen durch die Gerade LS, die Π_1 in T schneidet; ihre Grundrifsspuren sind also die Tangenten aus T an k. Die zugehörigen Berührungsmantellinien bilden die Eigenschattengrenze des Kegels für Beleuchtung aus L.

Um die Schnittpunkte einer Geraden g mit der Kegelfläche zu konstruieren, legen wir durch g und S eine Hilfsebene Δ. Zu dem Zwecke ziehen wir durch S die Gerade $h \parallel g$ und bestimmen von g und h die ersten Spurpunkte G_1 und H_1, sowie von Δ die erste Spurlinie $d_1 \equiv G_1 H_1$. Sind A und B die Schnittpunkte von k mit d_1, so schneidet Δ die Kegelfläche in den Mantellinien SA und SB, und diese treffen g in den gesuchten Punkten P und Q.

78. Darstellung eines geraden Kreiskegels, von welchem die Spitze S, sowie der Mittelpunkt M und der Radius r des Grundkreises k gegeben sind. Wir konstruieren die Umrifslinien des Kegels mit Hilfe der Kugel, die dem Kegel in dem Kreise k eingeschrieben ist. Jede Ebene, die den Kegel in einer Mantellinie ST berührt, berührt diese Kugel in dem auf k liegenden Endpunkte T von ST. Steht nun die Berührungsebene auf einer Projektionsebene senkrecht, so ist ST eine Umrifslinie des Kegels und T ein Punkt auf dem Umrifs der Kugel; dann berührt die betreffende Projektion von ST den scheinbaren Umrifs der Kugel in der Projektion von T. Die scheinbaren Umrifslinien des Kegels sind also die Tangenten aus S' und S'' an die scheinbaren Umrisse der Kugel, und die zugehörigen Berührungspunkte liegen zugleich auf den Projektionen von k.

Ausführung. Die erste projizierende Ebene von SM schneidet den durch k begrenzten Kegel in einem gleichschenkligen Dreieck CSD. Legen wir sie in Π_1 um, so gelangt SM nach S_0M_0 und C nach C_0 ($M_0C_0 \perp S_0M_0$ und $= r$). Ziehen wir $C_0O_0 \perp S_0C_0$ bis S_0M_0, so ist O_0 der umgelegte Mittelpunkt und O_0C_0 der Radius der Hilfskugel; ihre scheinbaren Umrisse sind also die Kreise h' und i'' mit O_0C_0 um O' und O''. An diese legen wir aus S' und S'' die Tangentenpaare $S'T'$, $S'U'$ und $S''V''$, $S''W''$. — Die Projektionen von k ergeben sich nach 69.

Schnitt einer Cylinderfläche mit einer Ebene.

79. Aufgabe. Den Schnitt eines geraden Kreiscylinders, dessen Grundkreis k_1 in Π_1 liegt, mit einer auf Π_2 senkrechten Ebene E (e_1, e_2) zu konstruieren. Wir erhalten als Schnittkurve eine Ellipse k_3, deren Mittelpunkt M_3 sich auf der Cylinderachse M_1M_2 befindet; ihre zweite Projektion ist die auf e_2 liegende Strecke $A_3''B_3''$ zwischen den scheinbaren Umrifslinien $A_1''A_2''$ und $B_1''B_2''$. Da k_3' mit k_1 zusammenfällt, so entspricht jedem Durchmesser von k_1 ein gröfserer Durchmesser von k_3, ausgenommen den zu e_1 parallelen Durchmesser C_1D_1, dem in k_3 eine parallele und gleich grofse Strecke C_3D_3, also die kleine Achse zugeordnet ist. Als grofse Achse ergiebt sich demnach $A_3B_3 \# A_3''B_3''$.

Abwickelung. Schneiden wir den Cylinder nach der Mantellinie C_1C_2 auf und wickeln ihn in die Zeichenebene ab, so verwandelt er sich in ein Rechteck, dessen Grundlinie C_1C_1 gleich der Peripherie von k_1 und dessen Höhe $= C_1C_2$ ist. (Näherungsverfahren für die Rektifikation des Kreises k_1: Wir ziehen durch M_1 eine Gerade, die mit M_1C_1 einen Winkel von 30^0 bildet, schneiden sie in V mit der Tangente des Punktes C_1 und tragen auf dieser von V aus in der Richtung nach C_1 den Radius r des Kreises dreimal ab. Bezeichnet U den Endpunkt der so erhaltenen Strecke, so ist $UD_1 = r \cdot 3{,}14153\ldots$)

Die Ellipse k_3 verwandelt sich in der Abwickelung in eine aus vier kongruenten Teilen C_3B_3, B_3D_3 . . . bestehende Kurve. Um sie zu konstruieren, legen wir durch C_3D_3 eine Horizontalebene Σ, die den Cylinder in einem Kreise k, die Umrifslinien A_1A_2 und B_1B_2 in

A und B schneidet, und teilen den Quadranten C_3B, im Grundriſs also den Quadranten C_1B_1 und in der Abwickelung die Strecke C_3B, in eine hinreichende Anzahl gleicher Teile. Ist P ein solcher Teilpunkt, P_3 der Schnittpunkt von E mit der durch P gehenden Mantellinie, so machen wir in der Abwickelung die Strecke $PP_3 \parallel C_1C_2$ und $= P''P_3''$.

Die Tangente in P_3 an die Ellipse k_3 ist die Schnittlinie der Ebene E mit der Berührungsebene des Cylinders in P_3. Die Berührungsebene schneidet Σ in der Tangente PT von k, und diese trifft C_3D_3 im Punkte T, dessen Grundriſsprojektion T' mit dem Schnittpunkte von C_1D_1 und der Tangente in P' an k_1 zusammenfällt; dann ist P_3T die Tangente an k_3. — Die Tangente an die verwandelte Kurve bildet mit der Geraden P_3P denselben Winkel, wie die Ellipsentangente mit der entsprechenden Mantellinie; wir erhalten sie also, indem wir das rechtwinklige Dreieck P_3PT in der Abwickelungsfigur an P_3P wieder anheften ($PT = P'T'$).

Wählen wir in der Abwickelung den Punkt C_3 zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit der $\mathfrak{x}$-Achse C_3D_3 und bezeichnen mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Koordinaten von P_3, mit φ den Winkel $P'M_1C_1$, mit ε_1 den ersten Neigungswinkel von E, so ist $\mathfrak{x}$ gleich dem Bogen C_1P' von k_1, also $= r\varphi$. Dann folgt aus $\Delta\, P_3''P''M_3''$:

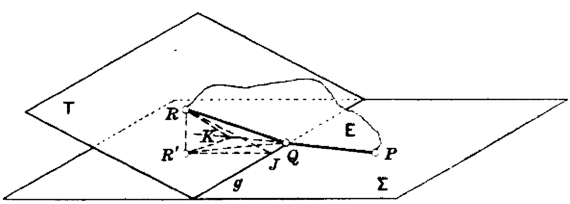
$$\mathfrak{y} = P_3''P'' = M_3''P''\,.\,tan\,\varepsilon_1 = r\,sin\,\varphi\,tan\,\varepsilon_1 = r\,tan\,\varepsilon_1\,sin\,\frac{\mathfrak{x}}{r}\,.$$

Die Verwandelte der Schnittellipse ist also eine Sinuskurve mit den Scheiteln A_3, B_3 und den Wendepunkten C_3, D_3. Die Inflexionstangenten in C_3 und D_3 bilden mit C_3D_3 den Winkel ε_1.

Hat E eine beliebige Lage gegen die Projektionsebenen, so nehmen wir eine Π_3 zu Hilfe, die wir $\perp e_1$, etwa durch die Cylinderachse, legen.

80. Beziehung zwischen dem Krümmungsradius ϱ in irgend einem Punkte P einer auf einer abwickelbaren Fläche liegenden Kurve c und dem Krümmungsradius ϱ_0 im entsprechenden Punkte der verwandelten Kurve c_0 (Fig. 9). Wir bezeichnen mit $PQ = QR = ds$ zwei auf einander folgende Elemente

Fig. 9.



von c, mit Σ und T bezw. die Berührungsebenen der Fläche, in denen sich diese Elemente befinden, mit g die Schnittlinie beider Ebenen, also die durch Q gehende Erzeugende der Fläche, mit $d\vartheta$ den Winkel, den QR mit der Verlängerung von PQ einschlieſst; dann ist:

$$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

und zwar gilt dies unabhängig davon, ob c eine ebene oder unebene Kurve bedeutet. Im ersten Falle liegt c in der durch P, Q, R bestimmten Ebene E; im zweiten, allgemeineren Falle ist E die Schmiegungsebene von c in P.

Bei der Abwickelung der Fläche gelangt der in T befindliche Elementarstreifen durch Drehung um g in die Ebene Σ. Verstehen wir unter R' und J bezw. die Fufspunkte der Lote von R auf Σ und g, so erhalten wir die neue Lage R_0 von R, indem wir auf JR' die Strecke $JR_0 = JR$ machen. Dann ist $\angle RJR'$ der unendlich kleine Neigungswinkel $d\omega$ der Ebenen Σ und T und

$$JR' = JR \cos d\omega = JR_0 \cos d\omega,$$

also, von unendlich kleinen Gröfsen höherer Ordnung abgesehen, $JR' = JR_0$. Wir können demnach die Punkte R' und R_0 als zusammenfallend betrachten, d. h. P, Q, R' sind drei unendlich benachbarte Punkte der verwandelten Kurve c_0. Bildet daher QR' mit der Verlängerung von PQ den Winkel $d\eta$, so ist der Krümmungsradius von c_0 in P

$$\varrho_0 = \frac{ds}{d\eta},$$

oder nach 1):

$$\varrho_0 = \varrho \frac{d\vartheta}{d\eta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Fällen wir noch von R und R' auf die Verlängerung von PQ die Lote RK und $R'K$, so ist $\angle RKR'$ der Neigungswinkel α der Ebenen E und Σ, und es ergiebt sich:

$$\sin d\vartheta = d\vartheta = \frac{RK}{QR}$$

$$\sin d\eta = d\eta = \frac{R'K}{QR'} = \frac{R'K}{QR},$$

also:

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = \frac{RK}{R'K} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

mithin geht Gleichung 2) über in:

$$\varrho_0 = \frac{\varrho}{\cos \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Dabei bezeichnet α den Winkel, den im Punkte P die Berührungsebene der abwickelbaren Fläche und die Schmiegungsebene der Kurve c (bezw. die Ebene dieser Kurve) miteinander bilden.

Für $\alpha = 90^0$ wird $\varrho_0 = \infty$, d. h. die Kurve c_0 hat in P einen Wendepunkt (oder eine höhere Singularität). Insbesondere folgt für ebene Kurven der Satz: Schneidet man eine abwickelbare Fläche mit einer Ebene, so verwandeln sich diejenigen

Punkte der Schnittkurve, deren Berührungsebenen auf der schneidenden Ebene senkrecht stehen, bei der Abwickelung im allgemeinen in Wendepunkte (vergl. die Punkte C_3 und D_3 in 79).

81. Die soeben abgeleitete Beziehung zwischen ϱ und ϱ_0 liefert für die in 79. behandelte Aufgabe eine einfache Konstruktion der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten A_3, B_3 der Sinuskurve k_3. Auf dem Cylinder sind A_3 und B_3 die Endpunkte der grofsen Achse der Schnittellipse; für jeden von ihnen ist also $\varrho = \frac{M_3 A^2}{M_3 A_3}$. Da ferner $\angle \alpha = 90^0 - \varepsilon_1$ ist, so geht Gleichung 3) über in:

$$\varrho_0 = \frac{M_3 A^2}{A A_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Ziehen wir also $M_3'' F \perp e_2$ bis $A_1'' A_2''$, so ist $A'' F$ der Krümmungsradius der Sinuskurve k_3 in A_3 und B_3.

Schreiben wir Gleichung 4) in der Form

$$\varrho_0 = A A_3 \cot^2 \varepsilon_1,$$

so folgt die später zu benutzende Regel: Der Krümmungsradius im Scheitel einer Sinuskurve ist gleich der Scheitelordinate, multipliziert mit dem Quadrat der Kotangente des Winkels, den die Inflexionstangente mit der Abscissenachse bildet.

82. Der Schnitt einer Ebene E (e_1, e_2) mit einem schiefen Kreiscylinder, dessen Grundkreis k_1 in Π_1 liegt, ist eine Ellipse k_3, nämlich die perspektiv affine Kurve zu k_1 für e_1 als Affinitätsachse. Die Mantellinien durch die Endpunkte zweier aufeinander senkrechten Durchmesser von k_1 schneiden E in den Endpunkten zweier konjugierten Durchmesser von k_3. Zur Ausführung der Konstruktion eignet sich dasfelbe Verfahren wie beim ebenen Schnitt eines Prismas (52).

83. Abwickelung eines schiefen Kreiscylinders. Der Grundkreis k_1 befinde sich in Π_1, sein Mittelpunkt auf x; die Mantellinien seien $\| \Pi_2$; insbesondere mögen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die in Π_2 liegenden Mantellinien bedeuten. Wir teilen den vorderen Halbkreis k_1 von A_1 aus in eine beliebige Anzahl, etwa 12, gleicher Teile, bezeichnen die Teilpunkte der Reihe nach mit 1, 2, 3 . . . 12 $= B_1$ und ersetzen den Cylinder durch das Prisma, das die durch A_1, 1, 2 . . . gehenden Mantellinien zu Seitenkanten hat. Wickeln wir das Prisma unter Festhaltung von $A_1 A_2$ in Π_2 ab, so gelangen die Punkte 1, 2 . . . in die Lagen 1_0, 2_0 . . ., die wir erhalten, indem wir $1'' 1_0$, $2'' 2_0$ . . . $\perp A_1 A_2$ ziehen und die Strecken $A_1 1_0$, $1_0 2_0$ . . . gleich der Sehne $A_1 1$ des Kreises k_1 machen. Dann wird durch die Kurve $A_1 1_0 2_0$ . . . die Verwandelte des Kreises k_1 angenähert dargestellt.

Die Kurve hat in 6_0 einen Wendepunkt, weil die Berührungsebene des Cylinders im Punkte 6 auf Π_1 senkrecht steht (80). Die Inflexionstangente bildet mit der zugehörigen Mantellinie den Winkel $\alpha = \angle A_2 A_1 B_1$. — Die Krümmungsradien der Verwandelten in den

Scheitelpunkten A_1 und 12_0 sind $= \frac{r}{\cos \alpha}$, wenn r den Radius von k_1 bezeichnet; der zu A_1 gehörige Krümmungsmittelpunkt ist also der Schnittpunkt von $A_1 A_2$ mit der Geraden $66''$.

Sind die Mantellinien nicht parallel zu Π_2, so bilde man von dem Cylinder zunächst die Projektion auf eine Π_3, die zu den ersten projizierenden Ebenen der Mantellinien parallel ist.

Die vorliegende Aufgabe kann übrigens auch mit Hilfe eines Normalschnittes in derselben Weise gelöst werden, wie die entsprechende Aufgabe über das Prisma (51).

Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene.

84. Zwei ebene Schnitte einer Kegelfläche sind perspektiv kollineare Figuren für die Spitze des Kegels als Kollineationscentrum und die Schnittlinie beider Ebenen als Kollineationsachse (52). Das Entsprechende gilt von den Projektionen der Schnittkurven auf irgend eine Ebene.

Die ebenen Schnitte des Kreiskegels sind Kurven zweiter Ordnung, weil jede in der schneidenden Ebene liegende Gerade mit der Kegelfläche höchstens zwei Punkte gemein hat (77). Die Schnittkurve ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die schneidende Ebene zu keiner, einer oder zwei Mantellinien parallel ist. Um zu entscheiden, welcher dieser drei Fälle vorliegt, lege man durch die Spitze des Kegels eine Ebene parallel zur schneidenden Ebene.

85. Aufgabe. Den Schnitt der Ebene E (e_1, e_2) mit einem geraden Kreiskegel zu konstruieren, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Die Ebene, welche durch die Kegelachse $SM \perp e_1$ gelegt wird, teilt die Schnittkurve k_1 in zwei symmetrische Hälften und enthält demnach eine Achse von k_1. Sie schneidet E in einer Falllinie f, den Kegel in zwei Mantellinien SA und SB, und diese bestimmen auf f die Achsenendpunkte A_1 und B_1. — Nehmen wir der Einfachheit wegen $\mathsf{E} \perp \Pi_2$, so ist jene Symmetrieebene $\parallel \Pi_2$, und die zugehörigen Mantellinien SA, SB bilden den zweiten Umrifs des Kegels.

a) Elliptischer Schnitt. Die Aufrifsprojektion der Schnittellipse k_1 fällt zusammen mit der auf e_2 liegenden Strecke $A_1''B_1''$. Die zweite Ellipsenachse C_1D_1 geht durch den Mittelpunkt O_1 von A_1B_1 senkrecht zu Π_2; ihre Grundrifsprojektion ergiebt sich mit Hilfe des Kreises i, welchen die durch O_1 gelegte Horizontalebene aus dem Kegel schneidet. — Die Parallelprojektion einer Ellipse ist im allgemeinen wieder eine Ellipse, welche die Projektionen der Achsen der ersten zu einem Paar konjugierter Durchmesser hat. Im vorliegenden Falle sind aber $A_1'B_1'$ und $C_1'D_1'$ selbst die Achsen von k_1'.

Bezeichnen wir mit r_1 und r_2 bezw. die Abstände der Punkte A_1'' und B_1'' von $S''M''$, so ist als Mittellinie in einem Paralleltrapez die Aufrifsprojektion des Kreises $i = r_1 + r_2$, demnach als Radius von i' die Strecke $S'C_1' = \frac{r_1 + r_2}{2}$, d. h. $= \frac{A_1'B_1'}{2}$; S' ist also ein Brennpunkt von k_1'.

Der auf einer beliebigen Mantellinie SP befindliche Punkt P_1 von k_1 ergiebt sich zunächst im Aufriſs als $P_1'' = S''P'' \times e_2$, dann im Grundriſs am genauesten mit Hilfe des durch P_1'' bestimmten Horizontalschnittes durch den Kegel. — Die Tangenten in P an k und in P_1' an k_1' schneiden sich in T auf der Kollineationsachse e_1.

Als wahre Gröſse von k_1 erhalten wir durch Umlegung in Π_1 eine Ellipse k_1^0 mit den Achsen $A_1^0B_1^0 = A_1''B_1''$ und $C_1^0D_1^0 = C_1'D_1'$.

Die Abwickelung des Kegelmantels ist ein Kreissektor, der $S''A''$ zum Radius und die Peripherie von k zum Bogen hat. Dieser Bogen wird angenähert bestimmt durch Übertragen kleiner Bogenstücke von k. Um auf der Geraden SP den Punkt P_1 der Verwandelten von k_1 zu verzeichnen, ziehen wir $P_1''Q'' \parallel x$ bis $S''A''$; dann ist $SP_1 = S''Q''$. Die Tangente an die Verwandelte in P_1 ergiebt sich durch Anheften des rechtwinkligen Dreiecks P_1PT, dessen Kathete PT im Grundriſs in wahrer Gröſse erscheint.

Die Wendepunkte der Verwandelten entsprechen denjenigen Punkten V_1 und W_1 von k_1, deren Berührungsebenen auf E senkrecht stehen (80). Diese Ebenen gehen durch das Lot von S auf E. Ziehen wir aus seinem ersten Spurpunkte Z an k die Tangente ZV, so finden wir auf der Mantellinie SV in bekannter Weise den Punkt V_1 und damit die Tangente von k_1, die in der Abwickelung zur Inflexionstangente wird. — Bezeichnen wir mit ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien der Verwandelten in den Scheiteln A_1 und B_1, mit ϱ den Krümmungsradius der Ellipse k_1^0 in A_1^0, so ist nach 80:

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos \angle B_1''A_1''A''}, \quad \varrho_2 = \frac{\varrho}{\cos \angle S''B_1''A_1''};$$

ϱ_1 ergiebt sich also als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches ϱ zur Kathete und $\angle B_1''A_1''A''$ zum anliegenden Winkel hat.

86. b) Hyperbolischer Schnitt, $\mathsf{E} \perp \Pi_2$. Aus dem Aufriſs finden wir wieder unmittelbar die Scheitel A_1 und B_1, sowie den Mittelpunkt O_1 der Hyperbel k_1. Eine Ebene, die durch $S \parallel \mathsf{E}$ gelegt wird, hat mit dem Kegel zwei Mantellinien SF und SG gemein, welche die unendlich fernen Punkte von k_1 enthalten ($S''F'' \parallel e_2$). Parallel zu SF und SG gehen durch O_1 die Asymptoten von k_1.

Um auf irgend einer Mantellinie SP den Punkt P_1 von k_1 und zugleich die zugehörige Tangente zu ermitteln, verfahren wir, besonders wenn P_1'' als Schnittpunkt von e_2 und $S''P''$ nur ungenau bestimmt ist, nach 52. in folgender Weise: Eine horizontale Hilfsebene Σ schneidet E in einer ersten Hauptlinie m, den Kegel in einem Kreise k_2, die Gerade SP in P_2. Die Berührungsebene T des Kegels in der Mantellinie PP_2 hat zu Spurlinien in Π_1 und Σ bezw. die Tangenten PT und P_2T_2 an k und k_2. Sind nun T und T_2 bezw. die Schnittpunkte von e_1 und PT, sowie von m und P_2T_2, so ist TT_2 die Schnittlinie der Ebenen E und T, also die Tangente von k_1 im Punkte P_1, der hierdurch gleichfalls bestimmt wird.

Dasſelbe Verfahren empfiehlt sich auch zur Konstruktion der Asymptoten, insbesondere, wenn sich $S''B''$ und e_2 unter sehr spitzem Winkel schneiden, so daſs der Punkt O_1 als Mittelpunkt der Strecke

$A_1 B_1$ nicht scharf bestimmt ist. Die Asymptoten ergeben sich dann als Schnittlinien von E mit den Berührungsebenen des Kegels in SF und SG. Für die Abwickelung erhalten wir auf diese Weise zugleich die Asymptoten der Verwandelten von k_1.

87. Die Brennpunkte der ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels. Wir erzeugen den Kegel durch Drehung des gleichschenkligen Dreiecks ASB um seine Höhenlinie SM und schneiden ihn senkrecht zur Ebene ASB mit der Ebene E in einer Ellipse k_1; dann liegen auf SA und SB die Scheitel A_1 und B_1 von k_1. Konstruieren wir die Kreise v und v_*, welche die Geraden e_2, SA, SB der Reihe nach in F, H, J und F_*, H_*, J_* berühren, und deren Mittelpunkte K und K_* sich auf SM befinden, so erhalten wir aus ihnen durch Drehung um SM zwei Kugeln K und K_*; diese berühren E in F und F_* und den Kegel in zwei Kreisen u und u_* mit den Durchmessern HJ und $H_* J_*$. Eine beliebige Mantellinie schneide k_1, u, u_* bezw. in den Punkten P_1, Q, Q_*. Dann sind FP_1 und QP_1 zwei Tangenten der Kugel K aus dem Punkte P_1, also ist:

$$FP_1 = QP_1$$

und ebenso

$$F_* P_1 = Q_* P_1,$$

folglich:

$$FP_1 + F_* P_1 = QQ_* = HH_*,$$

d. h. konstant für alle Punkte von k_1. Wir schliefsen daraus, dafs F und F_* die Brennpunkte von k_1 sind, und erhalten demnach den Satz: Schneidet man einen geraden Kreiskegel durch eine Ebene und konstruiert die beiden Kugeln, die den Kegel in einem Kreise und die Ebene in einem Punkte berühren, so sind die beiden Berührungspunkte die Brennpunkte des entstehenden Kegelschnittes.

Sei G der Gegenpunkt von F im Kreise v; dann geht die Gerade GF_* durch den äufseren Ähnlichkeitspunkt S von v und v_*. Eine Ebene Δ, die parallel zu E durch den Kegel gelegt wird, schneidet diesen in einem Kegelschnitt k_2, der zu k_1 ähnlich ist, und dessen Brennpunkte auf den Geraden SF und SG liegen. Nun ist k_2 der scheinbare Umrifs der Kugel K für S als Projektionscentrum und Δ als Bildebene; d. h.: Der scheinbare Umrifs einer in Centralprojektion dargestellten Kugel ist ein Kegelschnitt, der die Projektionen der Endpunkte des auf der Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers zu Brennpunkten hat.

88. Hieraus ergiebt sich beiläufig die Darstellung der Kugel in schiefer Parallelprojektion. Die projizierenden Strahlen, welche die Kugel berühren, bilden einen geraden Kreiscylinder, und dieser schneidet die Bildebene Π_2 in der Umrifsellipse u_s, der schiefen Projektion des Hauptkreises u, dessen Ebene auf der Projektionsrichtung senkrecht steht. Denken wir uns von der Kugel den Mittelpunkt K etwa durch seine senkrechte und seine schiefe Projektion K'' und K_s, sowie den Radius r gegeben, so ist K_s der Mittelpunkt von

u_s. Machen wir auf $K_s K''$ die Strecken $K_s F_s = K_s G_s = \frac{r}{2}$, so sind F_s und G_s die schiefen Projektionen der Endpunkte des auf Π_2 senkrechten Kugeldurchmessers, also die Brennpunkte von u_s. Jeder Durchmesser von u erscheint in der schiefen Projektion vergröfsert, nur nicht der zu Π_2 parallele Durchmesser AB, der unverändert bleibt. Ziehen wir also $K_s A_s \perp K_s F_s$ und $= r$, so ist $K_s A_s$ die kleine Halbachse von u_s; die grofse Halbachse ist folglich $= F_s A_s$.

89. Schnitt der Ebene $\mathsf{E}(e_1, e_2)$ mit einem schiefen Kreiskegel, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Die Schnittkurve k_1 wird konstruiert, indem man für eine hinreichende Anzahl von Mantellinien ihre Schnittpunkte mit E ermittelt, etwa unter Benutzung einer $\Pi_3 \perp e_1$. — Die Ebene, die durch die Spitze S und den Mittelpunkt M von $k \perp \Pi_1$ gelegt wird, teilt den Kegel in zwei symmetrische Hälften und schneidet ihn in seiner längsten und seiner kürzesten Mantellinie SA bezw. SB. Soll daher der Kegel auch noch abgewickelt werden, so empfiehlt es sich, von vornherein den Kreis k von A aus in eine gerade Anzahl gleicher Teile zu teilen und für die nach den Teilpunkten gehenden Mantellinien die Schnittpunkte mit E zu bestimmen. Bei der Abwickelung ersetzt man den Kegel annäherungsweise durch die Pyramide, die jene Mantellinien zu Kanten hat.

Durchdringung zweier Kegel- oder Cylinderflächen.

90. Zwei krumme Flächen A und B erzeugen als ihre Durchdringung im allgemeinen eine Raumkurve c, die man konstruiert, indem man durch A und B eine Schar geeigneter Hilfsflächen legt und für jede derselben ihre Schnittkurven mit A und B ermittelt; die Schnittpunkte beider Kurven sind Punkte von c. Dabei sind unter „geeigneten“ Hilfsflächen solche zu verstehen, welche sowohl A wie B in möglichst einfachen, leicht konstruierbaren Kurven schneiden. In den meisten Fällen wird man Ebenen als Hilfsflächen verwenden, und dann ist jedesmal zu überlegen, für welche Ebenen die Konstruktion sich am einfachsten gestaltet.

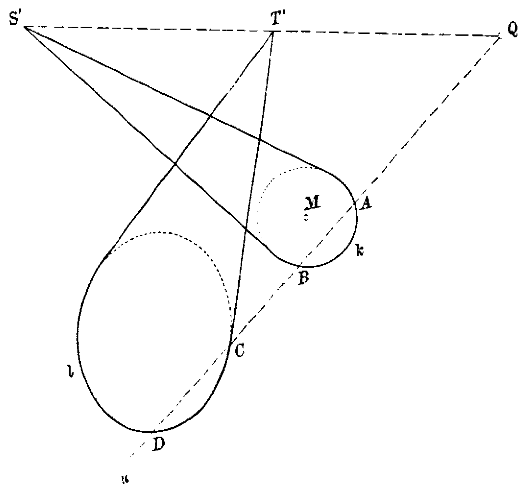
Eine krumme Fläche heifst von der m^{ten} Ordnung, wenn sie von jeder nicht in ihr liegenden Geraden in höchstens m Punkten getroffen wird. Man versteht ferner unter Ordnung einer Raumkurve die Anzahl der Punkte, die sie mit einer Ebene höchstens gemein hat. Sind nun die sich durchdringenden Flächen A und B bezw. von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung, so werden sie von einer beliebigen Ebene in zwei Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung geschnitten, und diese treffen sich in höchstens mn Punkten der Durchdringungskurve c. Daraus folgt: Zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung durchdringen sich im allgemeinen in einer Raumkurve mn^{ter} Ordnung. — Die Projektion dieser Kurve ist im allgemeinen auch von der mn^{ten} Ordnung. Denn eine beliebige Gerade der Bildebene hat mit der Bildkurve c' ebensoviele Punkte gemein, wie die durch sie gelegte projizierende Ebene mit der Kurve c, d. h. höchstens mn.

Die Tangente der Durchdringungskurve in irgend einem Punkte derselben ist die Schnittlinie der Berührungsebenen beider Flächen in diesem Punkte.

91. Um die Durchdringung zweier Kegelflächen zu konstruieren, benutzt man Hilfsebenen durch die Verbindungslinie beider Spitzen; solche Ebenen schneiden nämlich jede von beiden Flächen in Mantellinien (vergl. 55). Tritt an die Stelle des einen Kegels ein Cylinder, so legt man die Hilfsebenen durch die Gerade, die durch die Spitze des Kegels parallel zu den Mantellinien des Cylinders gezogen wird. Handelt es sich um die Durchdringung zweier Cylinder, so verwendet man Hilfsebenen parallel zu den Mantellinien beider Flächen.

92. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Kegelflächen zu konstruieren, deren Leitkurven in Π_1 liegen. Wir bezeichnen die beiden Kegelflächen mit K und Λ, ihre Spitzen bezw. mit S und T, ihre Leitkurven mit k und l. In Fig. 10, die nur die Grundrifsprojektion wiedergiebt, ist k ein Kreis, l eine Ellipse. Um die Durchdringungskurve c zu konstruieren, ermitteln wir zunächst den ersten Spurpunkt Q der Geraden ST. Eine Hilfsebene, die durch ST beliebig gelegt wird, hat zur ersten Spurlinie eine durch Q gehende Gerade u. Sind A, B bezw. C, D die Schnittpunkte von u mit k und l, so schneidet die Hilfsebene die Kegelflächen in den Mantellinien SA, SB und TC, TD, und diese bestimmen vier Punkte von c: $1 = SA \times TC$, $2 = SB \times TC$, $3 = SB \times TD$, $4 = SA \times TD$.

Fig. 10.



Drehen wir die Gerade u in Π_1 um Q, so erreicht sie eine Grenzlage v, in der sie l (in G) berührt und k (in E und F) schneidet. Dann zählt TG für zwei unendlich benachbarte Mantellinien des Kegels Λ in der durch v gelegten Hilfsebene, folglich hat jede der Geraden SE, SF zwei unendlich benachbarte Punkte mit c gemein, ist also eine Tangente der Durchdringungskurve. Das Analoge gilt von der aus Q an k gehenden Tangente w, die l in H und J schneidet. Auf k begrenzen die Punkte E und F, auf l die Punkte H und J einen Bogen, dessen Mantellinien den anderen Kegel nicht schneiden; es handelt sich also im vorliegenden Falle um eine blofse Eindringung. —

Eine vollständige Durchdringung findet statt, wenn die eine Leitkurve ganz innerhalb der beiden Tangenten liegt, die von Q an die andere Leitkurve gehen.

Die scheinbare Umrifslinie $T'C$ von Λ ist die Grundrifsprojektion zweier unendlich benachbarten Mantellinien und enthält deshalb zweimal zwei unendlich benachbarte Punkte der Kurve c'; sie ist also eine Doppeltangente der Projektion der Durchdringungskurve.

Bei der wirklichen Ausführung der Konstruktion bestimmen wir zuerst die ausgezeichneten Punkte auf den Mantellinien, welche c berühren, sowie auf den scheinbaren Umrifslinien und legen dann nach Bedürfnis weitere Hilfsebenen in die vorhandenen Lücken. Die Reihenfolge, in der die erhaltenen Punkte zu verbinden sind, ergiebt sich wie in 55. durch gleichzeitiges Umfahren der beiden Leitkurven.

Ein Punkt von c' ist sichtbar, wenn die beiden durch ihn gehenden Mantellinien im Grundrifs sichtbar sind.

Die Tangente der Durchdringungskurve im Punkte 4 hat zum ersten Spurpunkte den Schnittpunkt der Tangenten in A und D bezw. an k und l (90).

93. Singuläre Punkte im Bilde der Durchdringungskurve. In Fig. 10 hat die Kurve c' zwei Doppelpunkte. Ein solcher Doppelpunkt entsteht im Bilde einer Raumkurve immer dann, wenn ein projizierender Strahl die Originalkurve zweimal schneidet. — Rücken die beiden Schnittpunkte einander unendlich nahe, berührt also der projizierende Strahl die Originalkurve in einem Punkte P, so zieht sich in der Bildkurve die zum Doppelpunkte gehörige Schleife in den Punkt P' zusammen; d. h. die Bildkurve erhält in P' einen Rückkehrpunkt.

Einem Punkte der Originalkurve, dessen Schmiegungsebene eine projizierende Ebene ist, entspricht in der Bildkurve im allgemeinen ein Wendepunkt. Dann entsprechen nämlich den drei unendlich benachbarten Punkten, welche die Schmiegungsebene mit der Originalkurve gemein hat, auf der Bildkurve drei unendlich benachbarte Punkte in einer Geraden.

94. Unendlich ferne Punkte der Durchdringungskurve entstehen aus den Paaren paralleler Mantellinien beider Kegelflächen. Um diese Paare zu bestimmen, denken wir uns den einen Kegel — in Fig. 10 denjenigen mit kreisförmiger Leitkurve — parallel zu sich verschoben, bis seine Spitze S mit derjenigen T des anderen zusammenfällt. Die Leitkurve k_1 des verschobenen Kegels und die Kurve k sind ähnliche Figuren in paralleler Lage mit Q als Ähnlichkeitspunkt, sowie T' und S' als einem Paar entsprechender Punkte.

Bezeichnen wir mit P_1 einen Schnittpunkt von k_1 und l, mit P den entsprechenden Punkt von k (auf QP_1), so sind die Mantellinien SP und TP_1 einander parallel, und die zugehörigen Berührungsebenen schneiden sich in einer Asymptote der Durchdringungskurve. Diese ist $\parallel TP_1$ und geht durch den Schnittpunkt der Tangenten an k und l bezw. in P und P_1. — In Fig. 10 haben k_1 und l keinen Punkt miteinander gemein; die Kurve c hat also keinen unendlich fernen Punkt.

95. Aufgabe. Die Durchdringung eines geraden Kreiskegels mit einem geraden Kreiscylinder zu konstruieren. Der Grundkreis k des Kegels liege in Π_1; die Achse a des Cylinders sei $\parallel \Pi_2$, sein Grundkreis l befinde sich also in einer zu Π_2 senkrechten Ebene Φ (f_1, f_2). Wir ziehen zunächst durch die Spitze S des Kegels eine Parallele zu a, bestimmen ihre Schnittpunkte Q und R bezw. mit Π_1 und Φ und legen hierauf die Ebene Φ in Π_1 um; dabei gelangen l und R nach l_0 und R_0. Sei nun QE die erste Spurlinie einer durch SQ gehenden Hilfsebene H und E ihr Schnittpunkt mit f_1, so ist ER_0 die umgelegte Schnittlinie von Φ und H. Die Geraden QE und ER_0 treffen k und l_0 bezw. in A, B und C_0, D_0. Dann schneidet H den Kegel in den Geraden SA und SB, den Cylinder in zwei Mantellinien, deren Grundrifsprojektionen durch C_0 und D_0 gehen, und deren Aufrifsprojektionen mittels C'' und D'' bestimmt werden, u. s. w.

96. Durchdringung zweier geraden Kreiscylinder mit sich schneidenden Achsen. Die Achsen a und b mögen sich in Π_1 befinden; dann schneidet Π_1 die Grundkreise k und l bezw. in den Durchmessern $EF \perp a$ und $GH \perp b$. Die in Π_1 liegenden Mantellinien bestimmen sofort vier Punkte 1, 2, 3, 4 der Durchdringungskurve c. Um weitere Punkte zu konstruieren, schneiden wir beide Cylinder mit einer Schar von Hilfsebenen, die zu a und b, also zu Π_1 parallel sind. Verstehen wir unter H irgend eine dieser Ebenen, unter m und n ihre Schnittlinien mit den Ebenen von k und l, unter k_0 und l_0 die Umlegungen von k und l in Π_1, so ist in der Umlegung $m_0 \parallel EF$, $n_0 \parallel GH$ und Abst. (m_0, EF) = Abst. (n_0, GH) = Abst. (H, Π_1). Die Geraden m_0 und n_0 treffen k_0 und l_0 bezw. in A_0, B_0 und C_0, D_0, und die zugehörigen Mantellinien schneiden sich in vier Punkten von c.

Die Durchdringungskurve zweier Kegel- oder Cylinderflächen zweiter Ordnung ist eine Raumkurve vierter Ordnung; ihre Projektionen sind also im allgemeinen ebene Kurven von derselben Ordnung (90). Gegenwärtig ist nun die Kurve c symmetrisch in Bezug auf Π_1; jeder Punkt von c' ist also die Grundrifsprojektion zweier Punkte von c. Ziehen wir in Π_1 irgend eine Gerade g und legen durch sie eine Ebene $\perp \Pi_1$, so schneidet diese c höchstens in vier Punkten, die paarweise dieselbe Grundrifsprojektion besitzen. Die Gerade g hat demnach mit c' höchstens zwei Punkte gemein, d. h. die Grundrifsprojektion der Durchdringungskurve ist im vorliegenden Falle nur von der zweiten Ordnung; sie besteht aus zwei Bogenstücken 12 und 34 einer Hyperbel, die den Punkt $a \times b$ zum Mittelpunkte hat.

Haben die betrachteten Cylinderflächen gleichen Radius, so berühren sie sich in zwei Punkten V und W, deren Verbindungslinie im Punkte $a \times b$ von Π_1 senkrecht halbiert wird. Dann sind die Ellipsen, welche die Strecke VW und je eine Diagonale des Rhombus 1 2 3 4 zu Achsen haben, den beiden Cylindern gemeinsam; die Durchdringungskurve zerfällt also in zwei ebene Kurven, nämlich in die genannten Ellipsen (vergl. z. B. Kreuzgewölbe).

97. Weitere Sonderfälle. Berühren sich die beiden Kegelflächen in einem Punkte P, so ist derselbe ein Doppelpunkt ihrer Durchdringungskurve. Denn jede durch P gehende

Ebene schneidet die beiden Kegelflächen in zwei Kurven, die sich in P berühren; in jeder solchen Ebene zählt also P für zwei Schnittpunkte mit der Durchdringungskurve. — Der letzte Satz gilt offenbar ganz allgemein für irgend zwei krumme Flächen, die sich in einem Punkte berühren.

Wenn zwei Kegelflächen zweiter Ordnung eine Mantellinie gemein haben, so durchdringen sie sich überdies in einer Raumkurve dritter Ordnung. Berühren sie sich in der gemeinsamen Mantellinie, so ist der Rest der Durchdringungskurve ein Kegelschnitt. — Enthalten die beiden Kegelflächen denselben Kegelschnitt, so haben sie im allgemeinen noch einen zweiten Kegelschnitt gemein. Hiernach ist z. B. der Schlagschatten, den der kreisförmige Rand eines cylindrischen Rohres ins Innere des Rohres wirft, eine Ellipse.

Schlagschatten auf Kegel- und Cylinderflächen, sowie auf krummen Flächen überhaupt.

98. Die Grenzlinie des Schlagschattens, den eine krumme Fläche A von einer anderen Fläche B empfängt, ist ein Teil der Durchdringungskurve von A mit dem Lichtstrahlencylinder, der die Eigenschattengrenze bezw. den Rand von B zur Leitkurve hat. Wir ermitteln ihn zumeist nach dem indirekten Verfahren (62), indem wir von B und von einer auf A passend gewählten Kurvenschar den Schlagschatten auf Π_1 konstruieren. Bezeichnet i eine Kurve der Schar, i_h ihren Schatten auf Π_1, P_h einen Schnittpunkt von i_h mit der Schlagschattengrenze von B, so bestimmt der durch P_h rückwärts gezogene Lichtstrahl auf i einen Punkt P, welcher der Grenzlinie des auf A geworfenen Schlagschattens angehört, falls er sich auf dem beleuchteten Teile von A befindet.

Ist A eine Kegel- oder Cylinderfläche, so ersetzen wir jene Kurvenschar naturgemäfs durch eine Reihe von Mantellinien des beleuchteten Flächenteiles. Bei einer Kugel benutzen wir als Hilfskurven eine Schar horizontaler Kreise u. s. w.

99. Um dieselbe Aufgabe nach der Methode der projizierenden Ebenen (62) zu lösen, legen wir durch A und B eine Reihe von Hilfsebenen parallel zu einer projizierenden Ebene des Lichtstrahles l. Eine solche Ebene schneidet A und B bezw. in zwei Kurven a und b. Dann treffen die Tangenten, die $\parallel l$ an b gezogen werden, die Kurve a in Punkten der gesuchten Schlagschattengrenze.

Dieses Verfahren liefert zugleich — allerdings im allgemeinen wenig genau — in den Berührungspunkten der zu l parallelen Tangenten eine Reihe von Punkten der Eigenschattengrenzen beider Flächen.

100. Durchdringen sich die Flächen A und B in der Kurve c, und trifft diese die Eigenschattengrenze s von B im Punkte P, so berührt die Grenzlinie s_* des von B auf A geworfenen Schlagschattens die Kurve c in P. Denn s_* gehört zur Durchdringungskurve von A mit dem Lichtstrahlencylinder, der B in s berührt, folglich ergiebt sich die Tangente von s_* in P als Schnittlinie der zugehörigen Berührungsebenen an A und den Cylinder. Die letzte Ebene ist aber identisch mit der Berührungsebene von B in P, und diese schneidet die Berührungsebene von A in der Tangente von c.

VII. Umdrehungsflächen.

Eigenschaften der Umdrehungsflächen. Berührungsebenen und ebene Schnitte.

101. Eine Umdrehungsfläche (Rotationsfläche) entsteht, wenn eine unveränderliche Kurve sich um eine feste Gerade dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkommt. Die Kurve heifst die Erzeugende, die feste Gerade die Achse der Umdrehungsfläche. Jeder Punkt der Erzeugenden beschreibt bei der Drehung einen Parallelkreis der Fläche, dessen Ebene auf der Achse senkrecht steht, und dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt.

Jede auf der Fläche liegende Kurve, die jeden Parallelkreis schneidet, kann als Erzeugende der Fläche betrachtet werden.

Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Meridiankurve. Alle Meridiankurven sind kongruent und symmetrisch in Bezug auf die Achse, wie sich sofort ergiebt, wenn man eine Meridiankurve als Erzeugende auffafst.

102. Sei a die Achse, m die Meridiankurve einer Umdrehungsfläche, P ein beliebiger Punkt von m, PS die zugehörige Tangente. Durch P geht ein Parallelkreis p; sein Mittelpunkt Q ist der Fufspunkt des Lotes von P auf a. Die Tangenten in P an m und p bestimmen die Berührungsebene T der Fläche in P. Da die Parallelkreistangente auf der Meridianebene senkrecht steht, so gilt dasfelbe von der Ebene T, d. h.: Die Berührungsebene einer Umdrehungsfläche ist senkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunktes. Deshalb fällt die Flächennormale in P zusammen mit der Meridiannormale PO.

Beschreiben wir um den Schnittpunkt O von PO und a einen Kreis mit dem Radius OP und drehen die ganze so erhaltene Figur um a, so folgt der Satz: Jede Umdrehungsfläche wird längs eines Parallelkreises von einem Umdrehungskegel und von einer Kugel berührt, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen. — Sie wird längs jeder Meridiankurve von einem Cylinder berührt, dessen Mantellinien auf der Meridianebene senkrecht stehen.

103. Darstellung einer Umdrehungsfläche, deren Achse a auf Π_1 senkrecht steht. In der zu Π_2 parallelen Meridianebene M_0 sei die Meridiankurve m_0 gegeben; sie bildet den zweiten wahren Umrifs der Fläche und soll deshalb als Umrifs- oder Hauptmeridian bezeichnet werden. Zum zweiten Umrifs gehören aufserdem die Parallelkreise derjenigen Punkte von m_0, deren Tangenten auf a senkrecht stehen. Der erste Umrifs besteht aus den Parallelkreisen solcher Punkte von m_0, deren Tangenten zu a parallel sind.

Ist der Punkt P der Umdrehungsfläche durch seine erste Projektion P' gegeben, so finden wir seine zweite Projektion mit Hilfe des Parallelkreises p, der durch P geht, und der m_0 in P_0 schneidet.

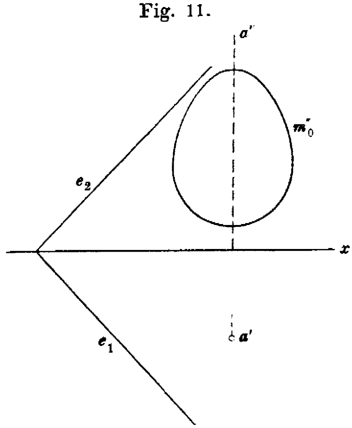
Die Berührungsebene T der Fläche in P ist nach dem Vorigen durch Parallelkreis- und Meridiantangente von P bestimmt. Drehen wir die durch P gehende Meridiankurve um a, bis sie mit m_0 zusammenfällt, so gelangt P nach P_0, und die zugehörige Meridiantangente kommt in eine Lage SR_0, in der sie a in S, Π_1 in R_0 schneidet. Machen wir dann auf $a'P'$ die Strecke $a'R =$ Abst. (R_0'', a''), so ist R der erste Spurpunkt der Meridiantangente in P. Die erste Spurlinie t_1 von T geht durch R parallel zur Parallelkreistangente in P, also $\perp a'R$. Trifft t_1 die Gerade M_0' in T, so ist ST die in der Ebene M_0 liegende Hauptlinie von T, mithin $t_2 \parallel S''T''$.

Die Gerade ST kann auch ohne vorhergehende Bestimmung von t_1 unmittelbar konstruiert werden. Ziehen wir nämlich $P_0''O'' \perp P_0''S''$ bis a'', so ist $P''O''$ die Aufrifsprojektion der Flächennormale in P, also $S''T'' \perp P''O''$.

Ist statt des Meridians eine beliebige Kurve c (c', c'') als Erzeugende der Fläche gegeben, so erhalten wir m_0, indem wir für eine Reihe von Punkten auf c die durch sie gehenden Parallelkreise zeichnen und deren Schnittpunkte mit der Ebene M_0 bestimmen.

104. Aufgabe. Den Schnitt einer Umdrehungsfläche, deren Achse a auf Π_1 senkrecht steht, mit der Ebene E (e_1, e_2) zu konstruieren (Fig. 11). Die Schnittkurve k ist symmetrisch in Bezug auf die Schnittlinie f von E mit der auf e_1 senkrechten Meridianebene M, ihre Grundrifsprojektion k' also symmetrisch in Bezug auf das Lot f' von a' auf e_1. Bezeichnen wir mit h die zweite Hauptlinie von E in der Ebene M_0 des Umrifsmeridians m_0, mit A den Schnittpunkt von a und h, mit B den Schnittpunkt von e_1 und f', so ist f die Verbindungslinie von A mit B. Auf f befindet sich der höchste und der tiefste Punkt der Kurve k; sie sind die Schnittpunkte C und D von f mit der in M liegenden Meridiankurve m. Um zunächst diese ausgezeichneten Punkte von k zu bestimmen, drehen wir die Ebene M um a, bis sie mit M_0 zusammenfällt. Dabei gelangt m nach m_0, B nach B_0, und die Gerade AB_0 schneidet m_0 in C_0 und D_0. Dann ist $a'C' =$ Abst. (C_0'', a''). Die Tangenten von k in C und D sind $\parallel e_1$.

Fig. 11.



Weitere Punkte von k ergeben sich mittels horizontaler Hilfsebenen, die zwischen C und D beliebig angenommen werden. Eine solche Ebene schneidet die Fläche in einem Parallelkreise p, die Ebene E in einer ersten Hauptlinie g, und diese trifft p in zwei Punkten P und Q von k. In der angegebenen Weise finden wir u. a. die Punkte von k im ersten Umrifs der Fläche; die Punkte im zweiten Umrifs liegen auf h.

Die Tangente von k im Punkte P ist die Schnittlinie von E mit der Berührungsebene der Fläche in P. Dabei genügt es, von dieser Berührungsebene entweder die erste Spur, oder die in M_0 liegende Hauptlinie zu konstruieren.

105. Schnitt einer Umdrehungsfläche mit einer ihrer Berührungsebenen. Ist die Meridiankurve m im Punkte P konkav gegen die Achse a, so hat die Berührungsebene T dieses Punktes in seiner nächsten Umgebung keinen Punkt mit der Umdrehungsfläche gemein. Sie schneidet die Fläche in ihrem weiteren Verlaufe im allgemeinen in einer Kurve, welcher der Punkt P als isolierter Punkt angehört. Denken wir uns die Ebene T parallel zu sich selbst um ein sehr kleines Stück in das Innere der Fläche verschoben, so hat sie mit der Fläche in der Umgebung von P ein kleines Oval gemein. Der Punkt P heifst deshalb ein elliptischer Punkt der Fläche.

Ist ferner m im Punkte Q konvex gegen a, so liegen m und der Parallelkreis des Punktes Q auf verschiedenen Seiten der zugehörigen Berührungsebene; diese trifft jeden der beiderseits benachbarten Parallelkreise in zwei Punkten und schneidet demnach die Fläche in einer Kurve, die in Q einen Knotenpunkt hat. Wir nennen Q einen hyperbolischen Punkt der Fläche.

Konstruieren wir endlich die Berührungsebene in einem Wendepunkte R von m, so schneidet diese Ebene von den Parallelkreisen der Nachbarpunkte nur diejenigen, die auf der einen Seite des zu R gehörigen Parallelkreises liegen, und R ist ein Rückkehrpunkt der Schnittkurve (parabolischer Punkt der Fläche).

Überhaupt gilt für jede beliebige krumme Fläche der Satz: Die Berührungsebene einer krummen Fläche schneidet die Fläche im allgemeinen in einer Kurve, die im Berührungspunkte einen Doppelpunkt hat. Je nachdem dieser ein isolierter Punkt, oder ein Knotenpunkt, oder ein Rückkehrpunkt der Schnittkurve ist, nennen wir ihn einen elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Punkt der Fläche.

Das einschalige Umdrehungshyperboloid.

106. Wir untersuchen die Umdrehungsfläche Φ, die entsteht, wenn eine Gerade g um eine zu ihr windschiefe Achse a rotiert. Dabei sei $a \perp \Pi_1$ und die Erzeugende g in ihrer Anfangslage $\parallel \Pi_2$.

Je zwei Lagen von g sind windschief zu einander; denn sie begrenzen auf allen Parallelkreisen Bogenstücke von gleichem Centriwinkel. Die Fläche Φ ist also windschief.

Der Punkt K von g, welcher der Achse a am nächsten liegt, beschreibt den Kehlkreis k der Fläche. Zwei Punkte von g, die von

K gleich weit entfernt sind, durchlaufen gleiche Parallelkreise; die Fläche Φ ist also symmetrisch in Bezug auf die Kehlkreisebene.

Die Grundrifsprojektionen der Erzeugenden berühren den Kreis k', ihre Aufrifsprojektionen den Aufrifs des Umrifsmeridians m_0.

Sei P ein beliebiger Punkt von g, p der durch ihn gehende Parallelkreis, P_0 ein Schnittpunkt von p mit der Ebene von m_0, O der Mittelpunkt und d der Radius von k, γ_1 der Winkel von g mit Π_1. Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{x}$ den Radius von p, mit $\mathfrak{y}$ die Entfernung der Ebenen von k und p, so sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die rechtwinkligen Koordinaten von P_0 für O als Anfangspunkt und a als $\mathfrak{y}$-Achse. Dann folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck $a'K'P'$:

$$a'P'^2 - K'P'^2 = d^2$$

oder

$$\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 \cot^2 \gamma_1 = d^2.$$

Die Meridiankurve m_0 ist also eine Hyperbel, die a zur Nebenachse, O zum Mittelpunkte und eine Parallele durch O zu g zur Asymptote hat; ihre Hauptachse hat die Länge $2d$. Die Fläche Φ ist demnach ein einschaliges Umdrehungshyperboloid. — Die Asymptoten von m_0 erzeugen den Asymptotenkegel der Fläche.

107. Ziehen wir durch K die Gerade h symmetrisch zu g in Bezug auf die Kehlkreisebene, so sind je zwei Punkte von g und h, die in derselben Horizontalebene liegen, von a gleich weit entfernt; jeder Punkt von h befindet sich also auf dem Parallelkreise, den der entsprechende Punkt von g beschreibt. Die Gerade h liegt demnach ganz auf dem Hyperboloid, das wir folglich auch durch Drehung von h erzeugen können. Auf dem Hyperboloid befindet sich also eine zweite Schar gerader Linien. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Geraden, nämlich je eine von jeder Schar. Jede Gerade der einen Schar schneidet alle Geraden der anderen Schar, aber keine Gerade derselben Schar.

Durch eine halbe Umdrehung um a gelangt h in eine Lage $h_1 \| g$. Daraus folgt: Zu jeder Geraden der einen Schar giebt es eine parallele Gerade in der anderen Schar.

108. Eine Ebene T, die durch die Gerade g beliebig gelegt wird, hat mit dem Hyperboloid noch eine Gerade der zweiten Schar gemein, und diese trifft g in einem Punkte P. Jede Gerade der Ebene T schneidet das Hyperboloid in den beiden Punkten, die sie mit den beiden Erzeugenden gemein hat. Geht sie durch P, so fallen die beiden Schnittpunkte zusammen; dann berührt also die Gerade das Hyperboloid in P. Daher der Satz: Jede durch eine Erzeugende gehende Ebene ist eine Berührungsebene des Hyperboloids. Sie schneidet die Fläche noch in einer Geraden der anderen Schar und berührt sie im Schnittpunkte der beiden Geraden. — Das Hyperboloid hat hiernach lauter hyperbolische Punkte (105).

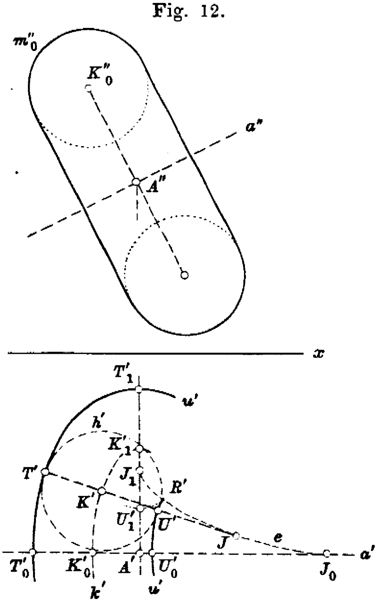
Zwei parallele Erzeugende, wie g und h_1, bestimmen eine asymptotische Berührungsebene der Fläche. Diese berührt gleichzeitig den Asymptotenkegel in der zu den beiden Erzeugenden parallelen Mantellinie.

Jede nicht berührende Ebene schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem sie zu keiner, einer oder zwei Mantellinien des Asymptotenkegels parallel ist.

Umrifslinien und Schattengrenzen.

109. Aufgabe. Den ersten scheinbaren Umrifs einer Umdrehungsfläche zu konstruieren, deren Achse a zu Π_2 parallel, aber gegen Π_1 beliebig geneigt ist. Die Fläche sei durch den Umrifsmeridian m_0 in der ersten projizierenden Ebene von a gegeben. Als ersten wahren Umrifs erhalten wir im allgemeinen eine Raumkurve u. Um diejenigen Punkte von u zu ermitteln, die sich auf einem beliebig gewählten Parallelkreise p befinden, benutzen wir den Kegel und die Kugel, welche die Umdrehungsfläche längs p berühren. In jedem Schnittpunkte von p und u haben die drei Flächen eine gemeinsame Berührungsebene, die auf Π_1 senkrecht steht; ihre ersten scheinbaren Umrifslinien berühren sich demnach in der Grundrifsprojektion des Schnittpunktes (78). Ziehen wir im Endpunkte P_0'' der Strecke p'' an m_0'' die Tangente $P_0''S''$ und die Normale $P_0''O''$, so erhalten wir auf a die Spitze S des Berührungskegels und den Mittelpunkt O der zugehörigen Kugel. Der erste scheinbare Umrifs der Kugel ist der Kreis h' um O' mit dem Radius $O''P_0''$; die entsprechenden Umrifslinien des Kegels sind also die Tangenten aus S' an h'. Sie berühren h' und zugleich die gesuchte Kurve u' in zwei Punkten T' und U'.

Fig. 12.



Der Punkt S ist zur Bestimmung von T und U nicht erforderlich. Die Aufrifsprojektion des Kreises h liegt nämlich auf der Parallelen durch O'' zu x, und diese schneidet p'' in $T'' = U''$.

110. Ist die Meridiankurve m_0 der vorigen Aufgabe ein Kreis vom Mittelpunkte K_0 und Radius r, so erzeugt sie eine Ringfläche, und dann ergiebt sich eine einfachere Konstruktion der Umrifslinie u' durch folgende Überlegung (Fig. 12). Die Ringfläche ist die Einhüllende einer um a rotierenden Kugel vom Mittelpunkte K_0 und Radius r, folglich ist u' die Einhüllende der ersten scheinbaren Umrisse aller Lagen dieser Kugel. Bei der Drehung um a beschreibt

K_0 einen Kreis k, dessen Mittelpunkt A auf a liegt. Seine Grundrifsprojektion ist eine Ellipse k' mit den Halbachsen $A'K_0'$ und $A'K_1' = A''K_0''$. Wir erhalten demnach u' als die Einhüllende aller Kreise vom Radius r, deren Mittelpunkte sich auf k' befinden. Irgend zwei dieser Kreise, mit den Mittelpunkten K' und L', schneiden sich in zwei Punkten T' und U', deren Verbindungslinie von $K'L'$ senkrecht halbiert wird. Sind nun K' und L' zwei unendlich benachbarte Punkte von k', so wird $T'U'$ zur Normale von k' in K'; dann ist $K'T' = K'U' = r$, und T' und U' sind zwei Punkte von u'. Wir können daher die Kurve u' auch in der Weise konstruieren, dafs wir auf allen Normalen von k' beiderseits die Strecke r abtragen; d. h. u' ist die Parallelkurve der Ellipse k' im Abstande r.

Der Kreis h', der K' zum Mittelpunkte, r zum Radius hat, berührt u' in T' und U'; die Ellipsennormale $T'U'$ ist also zugleich Normale von u' in T' und U'. Die Kurven k' und u' haben demnach dieselbe Evolute e, folglich in entsprechenden Punkten denselben Krümmungsmittelpunkt. Besonders nützlich bei der Konstruktion von u' sind die Scheitelkrümmungsmittelpunkte J_0 und J_1 von k'.

Wir können nunmehr die beiden Teile von u' auch als die Bahnkurven auffassen, welche die Punkte T_0' und U_0' beschreiben, während die Gerade J_0T_0' auf der Evolute e rollt. Trifft bei dieser Rollung der Punkt U_0' auf e, so entsteht ein Rückkehrpunkt R' von u'. Wir erhalten also R', indem wir auf e den Bogen J_0R' angenähert gleich der Strecke J_0U_0' machen. Im Punkte R wird die Raumkurve u vom projizierenden Strahl RR' berührt; hier endigt der sichtbare Bogen des inneren Teiles von u. Jeder tiefer liegende Punkt des inneren Kurvenstückes ist nämlich für das unendlich ferne erste projizierende Auge unsichtbar, weil der projizierende Strahl, der in dem betreffenden Punkte die Ringfläche berührt, oberhalb der Berührungsstelle von der undurchsichtig gedachten Fläche bereits geschnitten wird.

111. Aufgabe. Für eine Umdrehungsfläche, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist, die Eigenschattengrenze s bei Parallelbeleuchtung zu konstruieren (vergl. Fig. 11). Die Kurve s ist symmetrisch in Bezug auf die zur Lichtrichtung parallele Meridianebene M, ihre Grundrifsprojektion also symmetrisch in Bezug auf die Gerade l', die in der Richtung der Grundrifsprojektionen der Lichtstrahlen durch a' gezogen wird. Wir ermitteln zunächst die in der Ebene M befindlichen Punkte von s, indem wir an die zugehörige Meridiankurve m in der Lichtrichtung Tangenten legen. Zu dem Zwecke ziehen wir in M einen beliebigen Lichtstrahl l und drehen die Ebene M um a, bis sie mit der Ebene des Umrifsmeridians m_0 zusammenfällt (vergl. 73). Bezeichnen wir mit l_0'' die Aufrifsprojektion des gedrehten Lichtstrahles, mit C_0'' und D_0'' die Punkte von m_0'', deren Tangenten $\| l_0''$ sind, so entsprechen ihnen auf m als höchster und tiefster Punkt von s die Punkte C und D; dabei ist $a'C' =$ Abst. (C_0'', a'') und $C_0''C'' \| x$.

Um für einen Parallelkreis p, der zwischen C und D beliebig angenommen wird, die Punkte P und Q von s zu bestimmen, können wir verschiedene Methoden anwenden:

a) Kegelverfahren. Die gesuchten Punkte P und Q liegen auch auf der Eigenschattengrenze des Kegels, der die Umdrehungsfläche in p berührt. Konstruieren wir also in bekannter Weise auf a'' die Aufrifsprojektion S'' der Spitze des Berührungskegels, sowie den Schatten S_1 von S auf die Ebene von p, so sind P' und Q' die Berührungspunkte der Tangenten aus S_1' an p'.

b) Kugelverfahren. Die Punkte P und Q befinden sich ferner auf der Eigenschattengrenze der zum Parallelkreise p gehörenden Berührungskugel. Bezeichnen wir mit O den Mittelpunkt der Kugel, mit E die Ebene ihrer Eigenschattengrenze, so geht E durch $O \perp l$ und schneidet die Ebene M_0 in einer Geraden OR, deren Aufrifsprojektion auf l'' senkrecht steht. Bedeutet R den Schnittpunkt von OR mit der Ebene von p, so liegt R' auf der Parallelen durch a' zu x. Dann schneidet E die Ebene von p in der durch R gehenden Geraden PQ; ihre Grundrifsprojektion ist das Lot von R' auf l'.

Wir ermitteln insbesondere von der Kurve s die Punkte T und U im ersten, sowie V und W im zweiten Umrifs der Fläche, indem wir an die scheinbaren Umrifslinien Tangenten ziehen, die bezw. zu l' und l'' parallel sind.

Für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale ergeben sich wesentliche Vereinfachungen der soeben abgeleiteten Konstruktion. Dann ist l_0'' parallel zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten zu x parallel bezw. senkrecht sind und sich verhalten wie $\sqrt{2} : 1$. Wir erhalten also die Punkte C_0'', D_0'' und hieraus C'', D'', ohne Benutzung des Grundrisses; denn es ist Abst. (C'', a'') gleich der Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, welches die Entfernung des Punktes C_0'' von a'' zur Hypotenuse hat. Ebenso finden wir von s'' die Punkte T'', U''. Bezeichnen wir ferner mit Z denjenigen Punkt von s, der sich mit W auf demselben Parallelkreise befindet, so ist Z'' der Schnittpunkt von a'' mit der Parallelen zu x durch W''; denn Z' fällt aus Symmetriegründen auf die Verlängerung von a''. — Die fünf Punkte V'', U'', Z'', T'', W'' genügen in manchen Fällen zur angenäherten Bestimmung des sichtbaren Teiles von s''.

Der Lichtstrahlencylinder, welcher die Fläche in s berührt, schneidet Π_1 in der Schlagschattengrenze s_h, die in Bezug auf l' symmetrisch ist und aus den Schlagschatten P_h, Q_h ... der vorher gefundenen Punkte P, Q ... von s konstruiert wird. Der Schlagschatten p_h des Parallelkreises p berührt s_h in P_h und Q_h; die Tangente von s_h in P_h ist also parallel zur Parallelkreistangente in P, d. h. $\perp a'P'$. — Der Schlagschatten des durch den höchsten Punkt C von s gehenden Parallelkreises hat mit s_h in C_h zwei zusammenfallende Berührungspunkte, d. h. vier unendlich benachbarte Punkte gemein; er ist daher der Krümmungskreis der Kurve s_h in ihrem Scheitel C_h. Ebenso ist der Krümmungsradius von s_h in D_h = Abst. (D_0'', a'').

112. Dieselbe Aufgabe für die Ringfläche. Wir bezeichnen wieder mit K_0 den Mittelpunkt, mit r den Radius des Meridiankreises m_0, mit A den Mittelpunkt des Ringes, d. h. den Fufspunkt des Lotes von K_0 auf a, und setzen $AK_0 = d$. Beschreiben wir um A mit dem Radius r eine Kugel, so schneidet eine durch a gelegte Ebene die

Kugel in einem Hauptkreise i, den Ring in zwei gleich grofsen Kreisen m_1 und m_2, und dann fällt der Kreis i bezw. mit m_1 oder m_2 zusammen, wenn wir ihn $\perp a$ nach der einen oder anderen Seite um die Strecke d verschieben. Dabei gelangt ein beliebiger Punkt P von i bezw. nach P_1 auf m_1 oder nach P_2 auf m_2, so dafs $PP_1 = PP_2 = d$ und $\perp a$ ist. Da die Tangenten an i, m_1, m_2 in P, P_1, P_2 parallel sind, so gilt dasſelbe von den Berührungsebenen der Kugel und des Ringes in den genannten Punkten; ist also P ein Punkt der Eigenschattengrenze w der Kugel, so gehören P_1 und P_2 zur Eigenschattengrenze s des Ringes. — Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der Kurve s'. Wir beschreiben um a' mit dem Radius r den Kreis h' als ersten scheinbaren Umrifs der Hilfskugel, ermitteln wie früher die Aufrifsprojektion l_0'' des $\| \Pi_2$ gedrehten Lichtstrahles l und ziehen in m_0'' den Radius $K_0'' C_0'' \perp l_0''$, sowie die Tangente $C_0'' N_0''$ bis $A'' K_0''$. Als Grundrifsprojektion von w erhalten wir bekanntlich eine Ellipse w' mit dem Mittelpunkte a' und der grofsen Halbachse $r \perp l'$; die kleine Halbachse ist gleich dem Abstande des Punktes C_0'' von der Parallelen zu a'' durch K_0'' (73). Machen wir dann auf einem beliebigen Durchmesser $P'Q'$ von w' die Strecken $P'P_1' = P'P_2' = Q'Q_1' = Q'Q_2' = d$, so sind P_1', P_2', Q_1', Q_2' vier Punkte von s'. — Die Kurve s' ist eine Konchoide der Ellipse w'.

Die Punktpaare P_1, P_2 und Q_1, Q_2 liegen in zwei Horizontalebenen, die von A gleich weit entfernt sind. Wir konstruieren ihre Aufrifsprojektionen mit Hilfe der zugehörigen Parallelkreise.

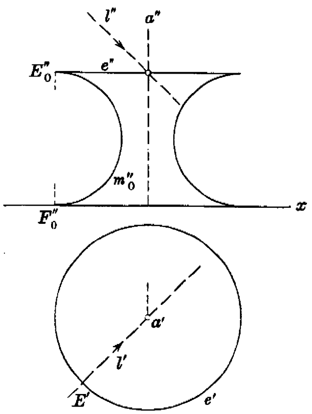
Auch zur Konstruktion des Schlagschattens, den der Ring auf Π_1 wirft, benutzen wir die Hilfskugel um A. Ihre Schlagschattengrenze ist eine Ellipse w_h mit dem Mittelpunkte A_h und den Halbachsen $K_0'' N_0''$ und r. Denken wir uns von den Punkten P und P_1 die Schlagschatten P_h und P_{1h} ermittelt, so wird $P_h P_{1h} \#\!\!\!= P'P_1'$, also $= d$. Die Tangente von w_h in P_h ist nach 111. $\perp a'P'$, d. h. $P_h P_{1h}$ ist die Normale von w_h in P_h. Daraus folgt: Die Schlagschattengrenze s_h des Ringes ist die Parallelkurve der Ellipse w_h im Abstande d (vergl. 110).

Der Punkt R, in welchem ein Lichtstrahl die Kurve s berührt, ist ein Grenzpunkt von s insofern, als auf der einen Seite von R die Kurve s ihre physische Bedeutung als Schattengrenze verliert. In R beginnt nämlich der Schlagschatten s_*, den der entgegengesetzte Bogen von s auf die Ringfläche wirft. Wir ermitteln ihn nach dem indirekten Verfahren (98), indem wir von einem passend gewählten Parallelkreise, etwa dem Kehlkreise, den Schlagschatten auf Π_1 konstruieren und seine Schnittpunkte mit s_h aufsuchen. Die Kurven s und s_* berühren sich in R (vergl. Wiener II, S. 183). — Die Kurve s_h hat in R_h einen Rückkehrpunkt.

113. In Fig. 13 (a. f. S.) ist als Meridiankurve statt des Kreises m_0 der vorigen Aufgabe nur der Halbkreis gegeben, der durch den vertikalen Durchmesser $E_0 F_0$ begrenzt wird. Es ist der Schlagschatten zu konstruieren, den die Umdrehungsfläche von ihrem oberen Rande empfängt. Die Grenzlinie des gesuchten Schlagschattens bildet einen Teil der Durchdringungskurve c der Fläche mit dem Lichtstrahlencylinder, der den Parallelkreis e des Punktes E_0 zur Leitkurve hat. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die zur Lichtrichtung parallele Meridianebene M; ihr höchster Punkt ist also der Schatten E_* des in M liegenden Punktes E von e ($E_0'' E_{*0}'' \parallel l_0''$ u. s. w.).

Um von der Kurve c die Punkte P_1 und Q_1 zu ermitteln, die einem beliebigen Parallelkreise p_1 angehören, konstruieren wir den Schatten e_1 von e auf die Ebene von p_1; dann sind P_1 und Q_1 die Schnittpunkte von p_1 mit e_1.

Fig. 13.



Der auf m_0 liegende Punkt der Schlagschattengrenze ergiebt sich als Schnittpunkt von m_0 mit dem elliptischen Schatten, den die Ebene des Umrifsmeridians von dem vorderen Halbkreise e empfängt.

Die Grenzlinie des Schlagschattens endigt in dem Schnittpunkte H von c mit der Eigenschattengrenze s der Fläche (112). Der durch H gehende Lichtstrahl hat mit der Fläche, also auch mit der Durchdringungskurve c, in H zwei unendlich benachbarte Punkte gemein; er berührt also c in H. Und allgemein: Trifft die Grenzlinie des auf eine Fläche fallenden Schlagschattens die Eigenschattengrenze der Fläche, so sind in den Schnittpunkten die Tangenten der Schlagschattengrenze den Lichtstrahlen parallel.

Durchdringungen.

114. Aufgabe. Die Durchdringung einer Umdrehungsfläche, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist, mit einer Kegelfläche zu konstruieren, deren Leitkurve k in Π_1 liegt. Um für einen beliebigen Parallelkreis p der Umdrehungsfläche seine Schnittpunkte mit dem Kegel zu ermitteln, legen wir durch die Spitze S des Kegels und durch p eine Hilfskegelfläche und konstruieren ihren Schnittkreis p_1 mit Π_1. Schneidet p_1 die Kurve k in P_1 und Q_1, so haben die beiden konzentrischen Kegelflächen die Mantellinien SP_1 und SQ_1 gemein, und diese treffen p in zwei Punkten P und Q der Durchdringungskurve.

115. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Umdrehungsflächen A und B zu konstruieren, deren Achsen a und b sich schneiden. Sei $a \perp \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$; die Ebene $\mathsf{E} = a, b$ schneide A und B bezw. in den Umrifsmeridianen m und n. Zur Konstruktion der Durchdringungskurve c benutzen wir als Hilfsflächen nicht, wie gewöhnlich, Ebenen, sondern Kugelflächen um den Schnittpunkt O von a und b; denn diese erzeugen sowohl mit A als mit B die einfachsten Schnitte, nämlich Parallelkreise. Beschreiben wir als zweiten scheinbaren Umrifs einer solchen Hilfskugel mit beliebigem Radius um O'' den Kreis v'', der die Kurven m'' und n'' bezw. in P'' und Q'' schneidet, so hat die Kugel mit A und B bezw. die Parallelkreise p und q der Punkte P und Q gemein, und diese treffen sich im allgemeinen in zwei Punkten R und S von c. Wir erhalten zunächst $R'' = S''$ als Schnittpunkt der Strecken p'' und q'' und finden dann R' und S' auf dem Kreise p'. — Die Kurve c ist symmetrisch in Bezug auf E.

116. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Umdrehungsflächen A und B mit windschiefen Achsen a und b zu konstruieren. Wir nehmen wieder $a \perp \Pi_1$, $b \| \Pi_2$ und bezeichnen bezw. mit m und n die Umrifsmeridiane beider Flächen. Unter Anwendung horizontaler Hilfsebenen gestaltet sich die Konstruktion der Durchdringungskurve c in folgender Weise: Die Hilfsebene Σ schneidet A in einem Parallelkreise p und B in einer gewissen Kurve q; die Schnittpunkte R und S von p und q befinden sich auf c. Um die Grundrifsprojektion von q zu ermitteln, zeichnen wir im Aufrifs eine Reihe von Parallelkreisen $i, k \ldots$ der Fläche B und bestimmen für jeden seine Schnittpunkte mit Σ. Dabei erhalten wir zum Punkte $1'' = i'' \times \Sigma''$ die Grundrifsprojektionen $1'$ und $2'$, indem wir den Kreis i in die Ebene von n nach i_0 umlegen. Ziehen wir $1'' 1_0'' \| b''$ bis zum Kreise i_0'', so sind die Abstände der Punkte $1'$ und $2'$ von $b' = 1'' 1_0''$.

VIII. Schraubenflächen.

Kurvenerzeugung durch Rollung.

117. In der Ebene der Zeichnung sei die feste Kurve f und die bewegliche Kurve w gegeben. Dann sagen wir, die Kurve w rollt auf f, wenn sie f während ihrer Bewegung beständig berührt, und wenn der Berührungspunkt auf beiden Kurven um gleiche Bogenstücke fortschreitet. Betrachten wir beide Kurven als Vielecke mit unendlich kleinen, entsprechend gleichen Seiten, so ergiebt sich sofort, dafs der Übergang von w aus einer Lage in die unendlich benachbarte aufgefafst werden kann als eine unendlich kleine Drehung um den augenblicklichen Berührungspunkt P. Denken wir uns daher mit der Kurve w einen Punkt A ihrer Ebene starr verbunden, so bewegt sich dieser momentan senkrecht zur Geraden AP. Hieraus folgt der Satz: Wird die Bewegung einer Ebene erzeugt durch das Rollen einer Kurve w auf einer anderen Kurve f, so geht für jeden Punkt der bewegten Ebene die Normale seiner Bahnkurve in jeder Lage des Punktes durch den augenblicklichen Berührungspunkt von w und f.

Die Bahnkurve des Punktes P von w hat an der mit P bezeichneten Berührungsstelle im allgemeinen einen Rückkehrpunkt, dessen Normale mit der gemeinschaftlichen Tangente von w und f zusammenfällt. Dies ergiebt sich sofort, wenn wir die Kurven w und f wie vorhin durch Vielecke ersetzen.

118. Ist f eine Gerade, w ein Kreis, so beschreibt jeder Punkt der bewegten Ebene eine Cykloide, die als gespitzt (gemein), verschlungen oder geschweift (gestreckt) bezeichnet wird, je nachdem der beschreibende Punkt auf, aufserhalb oder innerhalb w liegt. Sei w_0 die Anfangslage von w, M_0 der Mittelpunkt, P_0 der Berührungspunkt von w_0 mit f. Um die Cykloide zu konstruieren, die der auf $M_0 P_0$ liegende Punkt A_0 erzeugt, machen wir auf der Parallelen durch M_0 zu f die Strecke $M_0 M_n$ gleich der Peripherie von w_0, beschreiben um M_0 mit dem Radius $M_0 A_0$ den Kreis $\mathfrak{a}$ und teilen $M_0 M_n$, sowie $\mathfrak{a}$ von A_0 aus in n gleiche Teile. Sind M_i und $\mathfrak{A}_i$ ein Paar entsprechender Teilpunkte, und ziehen wir $M_i A_i \# M_0 \mathfrak{A}_i$, oder $\mathfrak{A}_i A_i \# M_0 M_i$, so ist A_i ein Punkt der Cykloide. Seine Normale geht nach dem Berührungspunkte P_i von f mit w_i, ist also $\| P_0 \mathfrak{A}_i$. (Über die Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte u. s. w. vergleiche Rohn und Papperitz II, S. 57; Wiener II, S. 343, sowie Burmester, Kinematik I, S. 134.)

119. Rollt umgekehrt die Gerade w aus der Anfangslage w_0 auf dem Kreise f, so beschreibt jeder Punkt von w, z. B. der augenblickliche Berührungspunkt A_0, eine gespitzte (gemeine) Kreisevolvente. Zu ihrer Konstruktion rektifizieren wir den Kreis (79) und teilen ihn von A_0 aus in n gleiche Teile. Ziehen wir im Teilpunkte P_i die Tangente w_i und machen auf ihr die Strecke $P_i A_i = \frac{i}{n}$ der rektifizierten Peripherie, so ist A_i ein Punkt der Evolvente.

Die Kreisevolvente ist eine Spirale; sie zieht sich in unendlich vielen Windungen um den Kreis f und hat in A_0 einen Rückkehrpunkt, sowie unendlich viele Doppelpunkte auf der Verbindungslinie von A_0 mit dem Mittelpunkte M von f.

Nach 117. ist $A_i P_i$ die Normale der Evolvente in A_i; mithin ist f die Evolute der Kurve und P_i ihr Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A_i.

Jeder Punkt aufserhalb w beschreibt in Verbindung mit der rollenden Tangente eine allgemeine Kreisevolvente, die wir als verschlungen oder geschweift bezeichnen, je nachdem der betreffende Punkt sich mit dem Punkte M auf derselben Seite, oder auf entgegengesetzten Seiten von w befindet. — Sei B derjenige Punkt der bewegten Ebene, dessen Anfangslage B_0 mit M zusammenfällt, und B_i die Lage, die er einnimmt, wenn w nach w_i gelangt. Ziehen wir die Gerade $MX \| w_0$ und setzen $MA_0 = a$, $MB_i = r$, $\angle XMB_i = \varphi$, so ist auch $\angle A_0 MP_i = \varphi$ und $MB_i = P_i A_i = a\varphi$, also ist $r = a\varphi$ die Gleichung der Bahnkurve des Punktes B; d. h. der Punkt B beschreibt eine archimedische Spirale.

Die Schraubenlinie.

120. Die Schraubenlinie ist die kürzeste (geodätische) Linie auf dem geraden Kreiscylinder. Bei der Abwickelung des Cylinders verwandelt sie sich also in eine Gerade, und umgekehrt entsteht durch Aufwickelung einer Ebene auf einen solchen Cylinder aus jeder Geraden der Ebene eine Schraubenlinie. — Die Achse des Cylinders heifst die Schraubenachse; sein Radius wird als Radius der Schraubenlinie bezeichnet. Die Schraubenlinie ist rechtsgängig, wenn sie für einen in die Achse (gleichgültig ob aufrecht oder verkehrt) gestellten Beschauer nach rechts abwärts geht.

Da die Verwandelte der Schraubenlinie mit den Verwandelten aller Cylindermantellinien gleiche Winkel bildet, so schneidet auch die Schraubenlinie alle Cylindermantellinien unter demselben Winkel und jede zu ihnen senkrechte Ebene unter einem Winkel β, der jenen Winkel zu 90^0 ergänzt und Neigung der Schraubenlinie genannt wird.

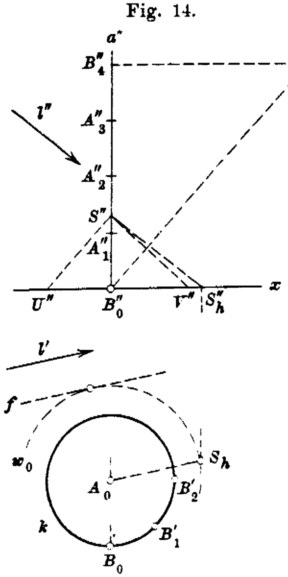
Die Schraubenlinie trifft jede Mantellinie unendlich oft. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{h}$ den Abschnitt der Mantellinie zwischen zwei auf einander folgenden Schnittpunkten, mit $\mathfrak{r}$ den Radius der Schraubenlinie, so ergiebt sich aus der Abwickelung, dafs

$$\mathfrak{h} = 2\pi\mathfrak{r}\tan\beta,$$

also konstant ist für alle Mantellinien. Wir nennen $\mathfrak{h}$ die Ganghöhe der Schraubenlinie.

Bei der Geraden, welche als Verwandelte der Schraubenlinie entsteht, verhalten sich die auf den Mantellinien gemessenen Ordinaten wie die zugehörigen Abscissen. Daraus folgt: Die Schraubenlinie wird erzeugt, wenn ein Punkt sich um eine feste Achse dreht und zugleich proportional zu dieser Drehung parallel zur Achse verschiebt. — Wir bezeichnen eine solche Bewegung als Schraubung.

Fig. 14.



Gleiche Bogenstücke derselben Schraubenlinie sind kongruent; d. h. die Schraubenlinie ist in sich selbst verschiebbar. Der Krümmungsradius der Schraubenlinie ist also konstant.

121. Darstellung einer Schraubenlinie, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist (Fig. 14). Die rechtsgängige Schraubenlinie b soll vom Punkte B beschrieben werden, dessen Anfangslage B_0 in Π_1 so gewählt ist, dafs ihre Verbindungslinie mit dem Fufspunkte A_0 von a auf x senkrecht steht. Hierdurch, sowie durch Angabe der Ganghöhe $\mathfrak{h}$ ist b vollkommen bestimmt. Um einen Gang von b zu konstruieren, teilen wir den Grundkreis k des Schraubencylinders in den Punkten B_0, B_1', B_2' . . . in eine beliebige Anzahl, etwa 8, gleicher Teile, machen auf a die Abschnitte $A_0 A_1 = A_1 A_2 = \cdots = \frac{\mathfrak{h}}{8}$ und bestimmen von den Punkten B_1, B_2 ... der Schraubenlinie die Aufrifsprojektionen auf den Parallelen zu x durch A_1'', A_2'' ...

Setzen wir $B_0'' A_i'' = \mathfrak{x}$, $A_i'' B_i'' = \mathfrak{y}$, $\angle B_0 A_0 B_i' = \varphi$ und verstehen unter $\mathfrak{r}$ wie vorhin den Radius von b, so wird $\mathfrak{y} = \mathfrak{r} \sin \varphi$, und es verhält sich

$$\varphi : 2\pi = \mathfrak{x} : \mathfrak{h},$$

also folgt:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{r} \sin \frac{2\pi \mathfrak{x}}{\mathfrak{h}}.$$

D. h.: Die Aufrifsprojektion der Schraubenlinie ist eine Sinuskurve.

Um die Tangente der Schraubenlinie im Punkte B_i zu ermitteln, denken wir uns das auf dem Schraubencylinder liegende Flächenstück $B_0 B_i B_i'$ in die durch $B_i B_i'$ gehende Berührungsebene abgewickelt. Dann verwandeln sich die Bogen $B_0 B_i'$ und $B_0 B_i$ bezw. in die Tangenten des Grundkreises und der Schraubenlinie in B_i' und B_i. Machen wir also auf der Tangente von k in B_i' die Strecke $B_i' T_i$ gleich dem Kreisbogen $B_i' B_0$, so ist T_i die Grundrifsspur der Tangente von b in B_i.

Die Tangente von b in B_0 ist $\| \Pi_2$. Ihre Aufrifsprojektion ist die Inflexionstangente von b'' in B_0''; wir erhalten sie als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $B_0'' B_4'' J''$, dessen Kathete $B_4'' J'' = \pi \mathfrak{r}$ ist. — Die Neigung β der Schraubenlinie ist gleich dem Winkel zwischen $B_0'' J''$ und x.

Der Krümmungsradius der Sinuskurve b'' im Scheitel B_2'' ist nach 81. $= \mathfrak{r} \tan^2 \beta$; machen wir also auf x die Strecke $B_0'' U'' = \mathfrak{r}$ und ziehen $U'' S'' \| B_0'' J''$ bis a'', sowie $S'' V'' \perp U'' S''$ bis x, so wird jener Krümmungsradius $= B_0'' V''$.

Die Strecke $B_0'' S''$ ist $= \mathfrak{r} \tan \beta$, also nach 120. $= \frac{\mathfrak{h}}{2\pi}$; wir nennen sie die reduzierte Ganghöhe der Schraubenlinie.

122. Da sich die Schraubenlinie bei der Abwickelung ihres Cylinders in eine Gerade, also in eine Kurve von unendlich grofsem Krümmungsradius verwandelt, so folgt aus Gleichung 3) in 80., dafs der Winkel zwischen der Schmiegungsebene der Schraubenlinie und der Berührungsebene des Schraubencylinders in jedem Punkte $= 90^0$ ist. D. h.: Die Schmiegungsebene in irgend einem Punkte der Schraubenlinie geht durch die zugehörige Cylindernormale.

Derselbe Satz gilt übrigens von den geodätischen Linien jeder beliebigen krummen Fläche. Die geodätische Linie einer solchen Fläche ist nämlich die Gestalt, welche ein über die Fläche gespannter Faden annimmt. Nun wirken in jedem Punkte des Fadens zwei gleich grofse Spannungen in den Richtungen der Nachbarelemente, und ihre Mittelkraft, die nach der Regel des Kräfteparallelogrammes in der Ebene dieser Elemente, d. h. in der Schmiegungsebene, gefunden wird, mufs in die Flächennormale fallen, wenn der Faden im Gleichgewichte sein soll.

123. Die Schmiegungsebene des Punktes B_0 (Fig. 14) schneidet den Schraubencylinder in einer Ellipse, die in ihrem Scheitel B_0 denselben Krümmungskreis besitzt, wie die Schraubenlinie. Die Halbachsen dieser Ellipse sind gleich $\frac{\mathfrak{r}}{\cos\beta}$ und $A_0 B_0 = \mathfrak{r}$, folglich ist nach 67. ihr Krümmungsradius in B_0, d. h. der Krümmungsradius der Schraubenlinie

$$\varrho = \frac{\mathfrak{r}}{\cos^2\beta} = U'' V''.$$

Konstruieren wir auf den Geraden $B_0 A_0$, $B_1 A_1$ ... zu den Punkten B_0, B_1 ... von b die Krümmungsmittelpunkte C_0, C_1 ..., so erhalten wir eine zweite Schraubenlinie c von der Ganghöhe $\mathfrak{h}$ und dem Radius $\varrho - \mathfrak{r} = B_0'' V''$. Ihre Neigung ist also gleich dem Winkel $S'' V'' B_0'' = 90^0 - \beta$, ihr Krümmungsradius mithin wiederum $= V'' U''$, d. h. $= \varrho$. Die Krümmungsmittelpunkte der Schraubenlinie c liegen daher umgekehrt auf der ursprünglichen Schraubenlinie b.

124. Schlagschatten der Schraubenlinie auf Π_1 (Fig. 14). Konstruieren wir bei gegebener Lichtrichtung l (l', l'') vom Punkte A_8 den Schlagschatten A_8^h, so finden wir den Schatten von B_i, indem wir die Strecke $A_0 A_8^h$ in acht gleiche Teile teilen und durch den Teilpunkt A_i^h die Strecke $A_i^h B_i^h \# A_0 B_i'$ ziehen. Dies ist aber die Konstruktion einer Cykloide, die der Punkt B_0 beschreibt, wenn der Kreis w_0, dessen Mittelpunkt A_0 und dessen Peripherie $= A_0 A_8^h$ ist, auf der zu l' parallelen Geraden f rollt. Bezeichnet λ den Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen Π_1, so ist $A_0 A_8^h = \mathfrak{h} \cot \lambda$, also der Radius von $w_0 = \frac{\mathfrak{h}}{2\pi} \cot \lambda$, d. h. gleich dem Schatten $A_0 S_h$ der reduzierten Ganghöhe.

Wir erhalten eine verschlungene, gespitzte oder geschweifte Cykloide, je nachdem

$$A_0 B_0 \gtreqless A_0 S_h$$

ist. Setzen wir hier für $A_0 B_0 = \mathfrak{r}$ den Ausdruck $\frac{\mathfrak{h}}{2\pi \tan\beta}$ und für $A_0 S_h$ den eben gefundenen Wert, so geht diese Bedingung über in

$$\tan\lambda \gtreqless \tan\beta.$$

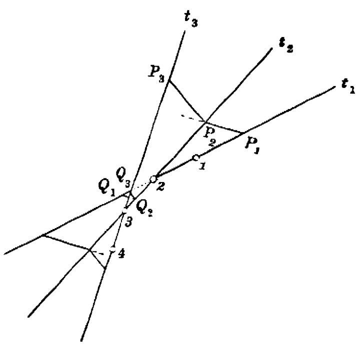
Daher der Satz: Der Schlagschatten der Schraubenlinie auf eine zu ihrer Achse senkrechte Ebene ist eine Cykloide, und zwar eine verschlungene, gespitzte oder geschweifte, je nachdem der Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen die Ebene gröfser ist als die Neigung der Schraubenlinie, oder gleich derselben, oder kleiner als dieselbe. — Der Schlagschatten auf jede andere Ebene ist demnach eine affine Kurve zu einer Cykloide.

Die abwickelbare Schraubenfläche.

125. Die Tangenten der Schraubenlinie b bilden eine abwickelbare Schraubenfläche, die von den Schmiegungsebenen der Kurve berührt wird (74). Die Schraubenlinie heifst die Rückkehrkurve (Rückkehrkante) ihrer Tangentenfläche, weil jeder ebene Schnitt der Fläche die Schnittpunkte mit der Schraubenlinie im allgemeinen zu Rückkehrpunkten hat.

Bezeichnen wir nämlich mit 1, 2, 3, 4 vier unendlich benachbarte Punkte der Kurve b, mit P_1, P_2, P_3 bezw. die Punkte, in denen die Tangenten $t_1 = 12$, $t_2 = 23$, $t_3 = 34$ von einer beliebigen Ebene E getroffen werden, so sind $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ zwei Elemente der Schnittkurve von E mit der abwickelbaren Schraubenfläche, und dann bildet $P_2 P_3$ mit der Verlängerung von $P_1 P_2$ einen unendlich kleinen Winkel $d\tau$ (Fig. 15). Wählen wir aber zwischen 2 und 3 auf t_2 den Punkt Q_2 und legen durch ihn eine Ebene $\|$ E, so schneidet diese die Elementarstreifen $t_1 t_2$ und $t_2 t_3$ bezw. in den Bogenelementen $Q_1 Q_2 \| P_1 P_2$ und $Q_2 Q_3 \| P_2 P_3$ in der Weise, dafs $Q_2 Q_3$ mit dem unverlängerten $Q_1 Q_2$ den Winkel $d\tau$ einschliefst. Q_2 ist also ein Rückkehrpunkt der entstehenden Schnittkurve. — Dies gilt offenbar ganz allgemein für jede abwickelbare Fläche.

Fig. 15.



Die Tangentenfläche der in Fig. 14 gegebenen Schraubenlinie b schneidet Π_1 in einer Evolvente e des Grundkreises k mit einem Rückkehrpunkte in B_0, und sie schneidet jede zu Π_1 parallele Ebene in einer zu e kongruenten Kurve, die aus der ersten durch Schraubung um a erhalten wird. Bei dieser Schraubenbewegung beschreibt jeder Doppelpunkt von e als Doppelkurve der Fläche eine Schraubenlinie, in welcher die Fläche sich selbst durchschneidet.

Jede Berührungsebene der Fläche hat die zugehörige Tangente von b zur Falllinie und bildet mit Π_1 den Winkel β; wir bezeichnen deshalb die abwickelbare Schraubenfläche als eine Fläche von gleichförmiger Neigung.

Die Inflexionstangenten der Sinuskurve b'' bilden den zweiten scheinbaren Umrifs der Fläche.

126. Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt Parallelen zu den Tangenten von b, so entsteht ein gerader Kreiskegel, dessen Achse zu a parallel ist: der Richtungskegel der abwickelbaren Schraubenfläche. Beide Flächen haben in entsprechenden Mantellinien parallele Berührungsebenen.

Aufgabe. Die Eigenschattengrenze der abwickelbaren Schraubenfläche zu konstruieren, welche die Schraubenlinie

b zur Rückkehrkurve hat (Fig. 14). Bei jeder abwickelbaren Fläche besteht die Eigenschattengrenze aus Mantellinien; denn ist P ein Punkt der Eigenschattengrenze auf der Mantellinie t und g der durch P gehende Lichtstrahl, so berührt die Ebene (t, g) die Fläche in allen Punkten von t.

Die Eigenschattengrenzen der abwickelbaren Schraubenfläche und ihres Richtungskegels sind einander parallel. Konstruieren wir den Richtungskegel über dem Grundkreise k, so ist S seine Spitze, und die Grenzlinien seines Eigenschattens gehen nach den Berührungspunkten F und G der Tangenten aus S_h an k. Dann erhalten wir die Grundrifsprojektion der Eigenschattengrenze unserer Schraubenfläche, indem wir parallel zu A_0F und A_0G an k diejenigen Tangenten ziehen, denen auf der Schraubenfläche Mantellinien entsprechen, die selbst wieder zu SF und SG parallel sind.

127. Bei der Abwickelung der Schraubenfläche ändert sich weder das Bogenelement ds der Rückkehrkurve b, noch der Winkel $d\vartheta$ zwischen zwei auf einander folgenden Elementen von b, also auch nicht der Krümmungsradius $\varrho = \frac{ds}{d\vartheta}$. Die Rückkehrkurve verwandelt sich also in einen Kreisbogen vom Radius ϱ. Für einen vollen Schraubengang ist die Bogenlänge B_0B_s gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $2\pi\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{h}$, oder $= 2 \,.\, B_0''J''$ in Fig. 14. Die Spurevolvente e verwandelt sich in die Evolvente des Kreisbogens.

Die Schraubenflächen im allgemeinen.

128. Eine Schraubenfläche entsteht durch Schraubung einer unveränderlichen Kurve um eine Achse. Jede Schraubenfläche ist in sich selbst verschiebbar. Als Erzeugende kann jede Kurve betrachtet werden, die alle koaxialen Schraubenlinien der Fläche schneidet. Die ebenen Schnitte der Fläche, welche die Achse enthalten, heifsen Meridiankurven (Profilkurven); diejenigen, welche auf der Achse senkrecht stehen, werden als Normalkurven (Basiskurven) bezeichnet. Die Meridiankurven sowohl, wie die Normalkurven gehen durch Schraubung ineinander über, sind also unter sich kongruent.

Ist von einer Schraubenfläche die Achse $a \perp \Pi_1$, die Erzeugende c (c', c''), sowie die Ganghöhe $\mathfrak{h}$ und der Sinn der Schraubung gegeben, und soll die zu Π_2 parallele Meridiankurve m_0 konstruiert werden, so ziehen wir durch den Punkt $A_0 = a \times \Pi_1$ die Geraden $\mathsf{M}_0' \,||\, x$, $\mathsf{M}_1', \mathsf{M}_2' \ldots$ so, dafs der Winkel zwischen je zwei auf einander folgenden Geraden gleich ist irgend einem Bruchteile von 360^0, z. B. $= \frac{360^0}{s}$. Schneidet M_i' die Kurve c' in P_i', so gelangt der Punkt P_i von c in die Ebene M_0 durch Drehung um a durch den Winkel $\mathsf{M}_i'\mathsf{M}_0'$ und eine Parallelverschiebung zu a um $\frac{i}{s}\,\mathfrak{h}$. Hierdurch ist die neue Lage P_i^0 von P_i zuerst im Grundrifs und dann im Aufrifs bestimmt. — Um die in Π_1 liegende Normalkurve n_0 zu ermitteln, ziehen wir zu x in den Abständen $\frac{\mathfrak{h}}{s}, \frac{2\mathfrak{h}}{s} \dots$ die Parallelen $N_1'', N_2'' \dots$ Ist $Q_i'' = N_i'' \times c''$, so machen wir unter Berücksichtigung des gegebenen Drehungssinnes $\angle Q_i' A_0 Q_i^0 = \frac{i}{s} 360^0$ und $A_0 Q_i^0 = A_0 Q_i'$; dann ist Q_i^0 ein Punkt von n_0. — Der erste wahre Umriſs der Fläche besteht aus den Schraubenlinien derjenigen Punkte von m_0, deren Tangenten $|| a$ sind. Der zweite Umriſs ist der Ort derjenigen Punkte des geschraubten Normalschnittes, dessen Tangenten auf Π_2 senkrecht stehen.

Die Berührungsebene T der Schraubenfläche in einem Punkte B derselben ist bestimmt durch die Tangente an die durch B gehende Erzeugende, sowie durch die Tangente an die Schraubenlinie b, die der Punkt B bei der Entstehung der Fläche beschreibt. Durch Schraubung von T erhalten wir eine abwickelbare Schraubenfläche, welche die gegebene Fläche in allen Punkten von b berührt. Sie gestattet dieselbe konstruktive Verwendung, wie die Parallelkreisberührungskegel einer Umdrehungsfläche.

129. Eine Regelschraubenfläche entsteht durch Schraubung einer Geraden. Der Punkt der Erzeugenden, welcher der Achse am nächsten liegt, beschreibt die Kehlschraubenlinie. Die Fläche ist abwickelbar, wenn die Erzeugende die Kehlschraubenlinie berührt; anderenfalls ist sie windschief. Bezeichnen wir mit γ den Neigungswinkel der Erzeugenden gegen eine zur Achse senkrechte Ebene, mit $\mathfrak{r}$ ihren kürzesten Abstand von der Achse, mit $\mathfrak{h}$ die Ganghöhe der Schraubung, so besteht im Falle einer abwickelbaren Schraubenfläche die Beziehung:

$$\mathfrak{h} = 2\pi\mathfrak{r} \tan\gamma.$$

Eine Regelschraubenfläche heiſst gerade oder schief, je nachdem die Erzeugende rechtwinklig oder schief gegen die Achse gerichtet ist, und sie heiſst geschlossen oder offen, je nachdem die Erzeugende die Achse schneidet oder nicht schneidet.

130. Die Normalkurve der schiefen Regelschraubenfläche. Wir gehen aus von der abwickelbaren Schraubenfläche, die durch Schraubung der Geraden t um die vertikale Achse a entsteht. Die Strecke AB, welche den kürzesten Abstand der beiden Geraden darstellt, bestimmt den Berührungspunkt B von t mit der Rückkehrkurve b. Sei ferner T der Schnittpunkt von t mit Π_1, k der Grundkreis von b, der AB zum Radius hat; dann berührt die Grundriſsprojektion $B'T$ von t den Kreis k in B'. Ziehen wir noch durch A und durch einen beliebigen Punkt C von AB die Geraden u und $v \,||\, t$ und verstehen unter U und V ihre Schnittpunkte mit Π_1, so ist $UTV \# ABC$ und $\perp B'T$.

Wir lassen nun u und v an der Schraubenbewegung teilnehmen, welche t ausführt. Dann erzeugt u eine schiefe geschlossene, v eine schiefe offene Regelschraubenfläche, und wir erhalten die in Π_1 liegenden Normalkurven aller drei Flächen als die Bahnen, welche die Punkte T, U, V in Verbindung mit der auf k rollenden Tangente $B'T$ beschreiben. Daraus folgt (119): Die Normalkurve der schiefen offenen Regelschraubenfläche ist eine allgemeine Kreisevolvente, diejenige der schiefen geschlossenen eine archimedische Spirale.

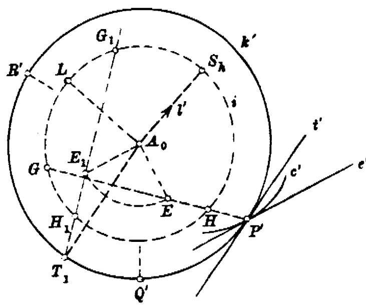
131. Die Röhrenschraubenfläche (Serpentine) ist die Einhüllende einer geschraubten Kugel. Sie wird von jeder Lage der Kugel in einem Hauptkreise berührt, dessen Ebene auf der Schraubenlinie b des Kugelmittelpunktes B senkrecht steht (Charakteristik der Fläche). Ist die Achse der Fläche $\perp \Pi_1$, so ergiebt sich als zweiter scheinbarer Umrifs eine Parallelkurve zur Sinuskurve b''.

Eigenschattengrenzen[1]).

132. Eine rechtsgängige Schraubenfläche sei gegeben durch ihre Achse $a \perp \Pi_1$, Ganghöhe $\mathfrak{h}$ und eine beliebige Lage der Erzeugenden c. Fig. 16 zeigt nur den Grundrifs; dabei bedeutet A_0 den Schnittpunkt von a mit Π_1. Machen wir auf a die Strecke $A_0 S$ gleich der reduzierten Ganghöhe $\frac{\mathfrak{h}}{2\pi}$ und bezeichnen mit S_h den ersten Spurpunkt des durch S gehenden Lichtstrahles l, so ist durch Angabe von S_h die Lichtrichtung bestimmt.

Der Kreis k' um A_0 sei die Grundrifsprojektion irgend einer Schraubenlinie k der Fläche; wir stellen uns die Aufgabe, die auf k befindlichen Punkte der Eigenschattengrenze s zu konstruieren. Der Schnittpunkt P von c und k würde der Kurve s angehören, wenn seine Berührungsebene T, die durch die Tangenten e und t von c und k bestimmt ist, zu l parallel wäre, oder mit anderen Worten, wenn die durch $S \parallel \mathsf{T}$ gelegte Ebene T_1 den Strahl l enthielte. Um T_1 zu bestimmen, ziehen wir durch S Parallelen zu e und t. Die erste schneide Π_1 in E_1 ($A_0 E_1 \parallel e'$); die Grundrifsspur T_1 der zweiten liegt auf dem Kreise k' ($A_0 T_1 \parallel t'$). Dann ist $E_1 T_1$ die Grundrifsspur von T_1, die durch S_h gehen mufs, wenn sich der Punkt P auf der Eigenschattengrenze s befinden soll. Gegenwärtig ist dies nicht der Fall; verstehen wir jedoch unter G_1 und H_1 die Schnittpunkte von $E_1 T_1$ mit dem Kreise i, der A_0 zum Mittelpunkte und $A_0 S_h$ zum Radius hat, so bedarf es nur einer rechtsgängigen Schraubung um $\angle G_1 A_0 S_h$ oder um $\angle H_1 A_0 S_h$, um den Punkt P auf die Kurve s zu bringen. Machen wir daher $\angle P' A_0 Q' = \angle G_1 A_0 S_h$ und $\angle P' A_0 R' = \angle H_1 A_0 S_h$, so erhalten wir auf k' zwei Punkte Q' und R' von s'.

Fig. 16.



[1]) Vergl. Rohn u. Papperitz II, S. 86.

133. Um die gefundene Konstruktion noch zu vereinfachen, definieren wir als Pol einer beliebigen Geraden m des Raumes denjenigen Punkt M von Π_1, den wir erhalten, wenn wir die Gerade $SM_1 \parallel m$ bis Π_1 ziehen und den Punkt M_1 um A_0 im Sinne der aufwärts gehenden Schraubenbewegung (in Fig. 16 also entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers) um 90^0 drehen. Konstruieren wir in dieser Weise in Fig. 16 zu den Geraden e, t, l die Pole E, T, L, so fällt T mit P' zusammen und L liegt auf dem Kreise i. Dann ergiebt sich auf Grund der vorhergehenden Darlegungen die Regel: Um auf einer Schraubenlinie k der Fläche die Punkte der Eigenschattengrenze s zu finden, ziehe man in einem beliebigen Punkte P von k die Tangente e der Erzeugenden c und bestimme in Π_1 ihren Pol E, sowie den Pol L des Lichtstrahles l. Ferner zeichne man in Π_1 den mit k' konzentrischen Kreis i durch L. Schneidet die Gerade $P'E$ den Kreis i in G und H, so geht P durch Schraubung um $\angle\, GA_0L$ oder $\angle\, HA_0L$ in die Punkte Q und R von s über.

Geht die Gerade EP' durch L, so ist P selbst ein Punkt der Kurve s.

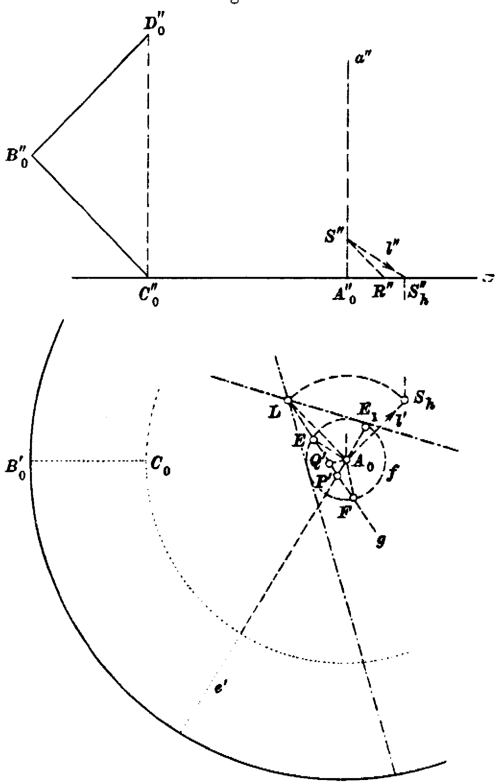
134. Ist c die Normalkurve der betrachteten Schraubenfläche, so tritt an die Stelle von E der unendlich ferne Punkt des Lotes von A_0 auf e', und die Gerade EP' wird zur Normale von e' in P'. Dann folgt aus dem letzten Satze in 133: Die Grundrifsprojektion s' der Eigenschattengrenze ist der Ort derjenigen Punkte der ersten Projektionen der Normalkurven, deren Normalen durch den Punkt L gehen.

Bei der geraden geschlossenen Regelschraubenfläche wird hiernach die Kurve s' von den Fufspunkten der Lote gebildet, die von L auf die Grundrifsprojektionen der Erzeugenden gefällt werden; sie ist also ein Kreis vom Durchmesser A_0L. Da jener Fufspunkt den Kreis s' einmal vollständig durchläuft, während die Grundrifsprojektion der Erzeugenden um A_0 eine halbe Umdrehung ausführt, so erhalten wir als Eigenschattengrenze s eine Schraubenlinie von der Ganghöhe $\frac{\mathfrak{h}}{2}$.

135. Bei der schiefen offenen Regelschraubenfläche fällt für jeden Punkt einer Erzeugenden die Tangente e mit dieser Erzeugenden zusammen, und die Punkte E_1 und E liegen für alle Erzeugenden auf einem Kreise f um A_0. Um also für eine beliebige Erzeugende e den Punkt P zu konstruieren, den sie mit s gemein hat, ziehen wir (in genau bestimmtem Sinne) die Gerade $A_0E \perp e'$ bis f und schneiden e' mit LE in P'.

Anwendung auf die scharfgängige Schraube. In Fig. 17 ist in der zu Π_2 parallelen Meridianebene das gleichschenklige Dreieck $B_0C_0D_0$ gegeben, dessen Basis C_0D_0 zur Achse a parallel ist. Dasselbe erzeugt durch rechtsgängige Schraubung mit der Ganghöhe $\mathfrak{h} = C_0D_0$ den Gewindeteil der Schraube, der also von zwei schiefen geschlossenen Regelschraubenflächen begrenzt wird. Um für die von der Strecke $B_0 C_0$ beschriebene Fläche die Eigenschattengrenze s zu konstruieren, machen wir auf a'' die Strecke $A_0'' S'' = \frac{\mathfrak{h}}{2\pi}$ und bestimmen wie früher die Punkte S_h und L. Wir ziehen ferner $S''R'' \parallel B_0'' C_0''$ bis x und beschreiben in Π_1 um A_0 mit $A_0'' R''$ den Kreis f.

Fig. 17.



Ist nun e' die Grundrifsprojektion einer beliebigen Erzeugenden e, E_1 der Schnittpunkt von f mit der Verlängerung von e' über A_0, so erhalten wir auf f den Pol E durch Vierteldrehung von $A_0 E_1$ entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers, und dann bestimmt die Gerade LE auf e' den Punkt P' von s'. Ziehen wir umgekehrt zuerst durch L eine beliebige Gerade g, die f in E und F schneidet, so finden wir auf ihr zwei Punkte von s', nämlich ihre Schnittpunkte P' und Q' mit den Loten in A_0 zu $A_0 E$ und $A_0 F$. Berührt g den Kreis f, so liegen P' und Q' beide unendlich fern, d. h. die Tangenten aus L an f sind Asymptoten von s'. Gegenwärtig kommt nur der Teil von s' in Betracht, den die um A_0 durch B_0' und C_0 beschriebenen Kreise einschliefsen, und dieser kann durch die Asymptoten angenähert ersetzt werden. — Die Kurve s' hat in A_0 einen Selbstberührungspunkt und in L einen Doppelpunkt, wie sich sofort ergiebt, wenn die Gerade g durch A_0, bezw. durch die Endpunkte des auf $A_0 L$ senkrechten Durchmessers von f gezogen wird.

IX. Windschiefe Flächen.

136. Nach 75. verstehen wir unter einer Regelfläche eine solche Fläche, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Um das Gesetz dieser Bewegung in jedem einzelnen Falle festzulegen, schreiben wir am einfachsten drei bestimmte Leitkurven l_1, l_2, l_3 vor, welche die Erzeugende beständig schneiden soll. Dann erhalten wir nämlich die durch irgend einen Punkt A_1 von l_1 gehenden Erzeugenden als die gemeinschaftlichen Mantellinien der beiden Kegelflächen, die A_1 zur Spitze und l_2 bezw. l_3 zu Leitkurven haben. Die so entstehende Regelfläche ist im allgemeinen windschief; denn sollten zwei unendlich benachbarte Erzeugende, welche mit l_1, l_2, l_3 bezw. die Punkte A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 gemein haben, einander schneiden, so müfsten die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, d. h. die Tangenten der drei Leitkurven in A_1, A_2, A_3, in einer und derselben Ebene liegen. Dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein; sollte es sich für gewisse Lagen der Erzeugenden ereignen, so besitzt die Fläche in einer solchen Erzeugenden ein ebenes Flächenelement, und findet es bei besonderer Auswahl der Leitkurven für alle Erzeugenden statt, so ist die Fläche abwickelbar.

137. Verzeichnen wir auf irgend einer windschiefen Fläche eine Reihe von unendlich dicht auf einander folgenden Erzeugenden e, f, g, h, i ... und legen durch eine derselben, etwa g, eine beliebige Ebene T, so schneidet diese die Fläche in einer Kurve s, die durch die unendlich benachbarten Schnittpunkte E, F, H, J von T mit e, f, h, i hindurchgeht. Die Kurve s wird zwischen F und H von der Geraden g in einem Punkte G getroffen, und dann ist G ein Knotenpunkt der vollständigen, aus g und s bestehenden Schnittkurve, welche T mit der Fläche gemein hat (vergl. 105, 108). Die Ebene T berührt demnach die Fläche in dem (hyperbolischen) Punkte G, und das Analoge gilt offenbar von jeder anderen, durch eine Erzeugende gelegten Ebene.

Eine eingehendere Untersuchung der Eigenschaften dieser Berührungsebenen würde die Verwendung der Geometrie der Lage erfordern, die wir hier nicht als bekannt voraussetzen dürfen.

Bei den Aufgaben über ebene Schnitte, Durchdringungen u. s. w. bedienen wir uns naturgemäfs stets der Erzeugenden der Fläche. Ebenso können wir die Eigenschattengrenze nach der Methode der projizierenden Ebenen (99) wenigstens angenähert ermitteln. Genauere Konstruktionen liefert wieder die Geometrie der Lage.

138. Je nachdem sich unter den drei zur Bestimmung der Fläche erforderlichen Leitkurven gerade Linien befinden oder nicht, können wir vier Arten von windschiefen Flächen unterscheiden.

a) Sind alle drei Leitlinien gerade und sämtlich windschief zu einander, so bezeichnen wir die Fläche als ein einschaliges Hyperboloid. Wir konstruieren sie am einfachsten, indem wir durch die Leitgerade l_1 ein Ebenenbüschel legen und die Schnittpunkte jeder einzelnen Ebene mit l_2 und l_3 bestimmen; ihre Verbindungslinie ist eine Erzeugende der Fläche. Durch jeden Punkt A_1 von l_1 geht eine Erzeugende, nämlich die Schnittlinie der Ebenen $A_1 l_2$ und $A_1 l_3$.

Die vorliegende Fläche, deren weitere Behandlung wir gleichfalls in die Geometrie der Lage verweisen, ist eine Verallgemeinerung des früher betrachteten einschaligen Umdrehungshyperboloids. Einen zweiten, technisch wichtigen Sonderfall bildet das hyperbolische

Paraboloid, das sich ergiebt, wenn die eine der drei Leitgeraden unendlich fern ist, also durch eine Richtungsebene ersetzt wird, zu der die sämtlichen Erzeugenden parallel sind. Dann schneiden diese die beiden endlichen Leitgeraden in ähnlichen Punktreihen.

139. Durch das windschiefe Viereck $ABCD$ ist ein hyperbolisches Paraboloid bestimmt, welches AB und CD zu Leitgeraden, BC und AD zu Erzeugenden hat. Bilden wir nämlich das Parallelogramm $ADCE$, so sind die sämtlichen Erzeugenden der Fläche zur Ebene BCE parallel; ziehen wir also durch einen beliebigen Punkt K von AE die Geraden $KF \parallel EB$ und $KG \parallel EC$ bezw. bis AB und CD, so ist FG eine solche Erzeugende. Wir können aber durch dasfelbe Viereck ein zweites hyperbolisches Paraboloid legen, indem wir BC und AD als Leitgeraden, AB und CD als Erzeugende und die Ebene ABE als Richtungsebene auffassen; um von ihm eine dritte Erzeugende HJ zu erhalten, ziehen wir durch irgend einen Punkt L von CE die Geraden $LH \parallel EB$ und $LJ \parallel EA$ bezw. bis BC und AD. Die Ebenen FGK und HJL schneiden sich in einer durch den Punkt $M = GK \times JL$ gehenden Geraden, die zu EB parallel ist; sie treffe FG in N, HJ in P. Dann verhält sich

$$\frac{MN}{KF} = \frac{GM}{GK}$$

und

$$\frac{KF}{EB} = \frac{AK}{AE},$$

also ist

$$MN = \frac{EB \,.\, GM \,.\, AK}{GK \,.\, AE}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$MP = \frac{EB \,.\, JM \,.\, CL}{JL \,.\, CE},$$

und hieraus folgt

$$MN = MP,$$

d. h. die Punkte N und P fallen zusammen. Die Erzeugende HJ des zweiten hyperbolischen Paraboloids schneidet also FG und folglich alle Erzeugenden des ersten; sie liegt demnach ganz auf diesem, und die beiden Paraboloide decken sich vollständig. Auf dem hyperbolischen Paraboloid giebt es also zwei Scharen gerader Linien.

Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei Geraden, nämlich je eine von jeder Schar. Ihre Ebene berührt die Fläche in dem betrachteten Punkte (137).

Unter den Berührungsebenen des hyperbolischen Paraboloids befindet sich auch die unendlich ferne Ebene des Raumes; denn diese hat mit der Fläche die unendlich fernen Geraden der Ebenen ABE und BCE gemein und berührt folglich die Fläche im unendlich fernen Punkte von BE. — Alle nicht berührenden Ebenen schneiden die Fläche in Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem sie zu BE parallel sind oder nicht.

140. b) Unter den windschiefen Flächen mit zwei Leitgeraden sind diejenigen bemerkenswert, bei denen die eine Leitgerade unendlich fern, also wieder durch eine Richtungsebene gegeben ist. Wir bezeichnen sie als Konoidflächen und verstehen insbesondere unter einem geraden Konoid ein solches, dessen endliche Leitgerade auf der Richtungsebene senkrecht steht.

Darstellung eines geraden Kreiskonoids, das durch die vertikale Leitgerade l und den in Π_2 liegenden Kreis k bestimmt ist. Den Endpunkten A und B des vertikalen, sowie C und D des horizontalen Kreisdurchmessers entsprechen vier ebene Flächenelemente AG, BH, CE, DE mit horizontalen bezw. durch l gehenden Berührungsebenen. Die Gerade l bildet von G bis H eine Doppellinie der Fläche. — Wie man leicht beweist, schneidet jede zu Π_2 parallele Ebene das Konoid in einer Ellipse.

Zu den Konoidflächen gehört auch die gerade geschlossene Regelschraubenfläche.

141. c) Von windschiefen Flächen mit einer Leitgeraden erwähnen wir die folgenden drei:

1. Die Wölbfläche des schrägen Durchganges hat zu Leitlinien zwei parallel gestellte, gleich grofse Kreise k_1 und k_2 und eine zu den Ebenen dieser Kreise senkrechte Gerade l durch den Mittelpunkt O der Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte M_1 und M_2. Wir wählen k_1 in Π_2 und $M_1M_2 \parallel \Pi_1$ und konstruieren die Fläche mit Hilfe eines Ebenenbüschels durch l. Eine Ebene desfelben schneide k_1 in P_1 und Q_1, k_2 in P_2 und Q_2, so dafs $M_1P_1 \parallel M_2Q_2$ und $M_1Q_1 \parallel M_2P_2$ ist; dann sind die zu einander parallelen Geraden P_1P_2 und Q_1Q_2 zwei Erzeugende der Fläche, während die Verbindungslinien P_1Q_2 und Q_1P_2 einem schiefen Kreiskegel mit O als Mittelpunkt angehören.

2. Das Cylindroid. Wir schneiden einen Kreiscylinder mit den Ebenen E und E_1 in den Ellipsen e und e_1 und bezeichnen als entsprechend je zwei Punkte von e und e_1, die, wie z. B. die Punkte P und P_1, auf derselben Mantellinie liegen. Verschieben wir die Ellipse e parallel zur Schnittlinie g von E und E_1 um eine beliebige Strecke PP_2 in die neue Lage e_2, so bilden die Geraden, welche die Punkte von e_2 mit den entsprechenden Punkten von e_1 verbinden, ein Cylindroid. Dieses hat zur Leitgeraden die unendlich ferne Gerade der Ebene PP_1P_2.

3. Die schiefe geschlossene Regelschraubenfläche.

d) Eine windschiefe Fläche ohne gerade Leitlinien ist z. B. die schiefe offene Regelschraubenfläche.

X. Grundzüge der Beleuchtungslehre.

142. Den früher ausgeführten Schattenkonstruktionen lag die Absicht zu Grunde, die Anschaulichkeit der durch Projektion erhaltenen Bilder durch Wiedergabe der Beleuchtungsverhältnisse zu erhöhen. Wir erreichen diesen Zweck auf vollkommenere Weise, wenn wir nicht nur die Grenzlinien zwischen Licht und Schatten, sondern auch die Abstufung der Helligkeit auf den beleuchteten Oberflächenteilen zur Darstellung bringen. Dabei betrachten wir ausschliefslich den Fall der Parallelbeleuchtung. Dann ist die Beleuchtungsstärke eines (ebenen) Flächenelementes proportional dem Cosinus des Winkels, den die Flächennormale mit der Lichtrichtung bildet. Bezeichnen wir diesen Einfallswinkel mit λ und setzen die Beleuchtungsstärke einer zur Lichtrichtung senkrechten Ebene $= 1$, so ist diejenige des betrachteten Flächenelementes $= \cos\lambda$. — Wir nehmen ferner an, die Oberfläche des beleuchteten Körpers sei vollkommen matt (nicht poliert), so dafs sie an jeder Stelle das einfallende Licht nach allen Richtungen hin zerstreut und nicht in bestimmter Richtung reflektiert. In diesem Falle ist die Helligkeit, in welcher ein Oberflächenelement unserem Auge erscheint, unabhängig von der Sehrichtung, also gleich seiner Beleuchtungsstärke $\cos\lambda$.

143. Die Helligkeit einer Ebene ist überall dieselbe.

Auf einer krummen Oberfläche bilden alle Punkte von bestimmter Helligkeit eine gewisse Kurve, welche Lichtgleiche (Isophote) genannt wird. — Die Lichtgleichen einer abwickelbaren Fläche sind ihre Erzeugenden.

Die Darstellung der Helligkeitsverteilung im Bilde einer krummen Fläche erfolgt durch Auftragen verschiedener Farbentöne. Um hierfür eine geometrische Grundlage zu gewinnen, konstruieren wir zunächst eine Anzahl von Lichtgleichen, etwa diejenigen sechs, welche den Werten $\cos\lambda = 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0$ entsprechen. Wir bezeichnen sie mit den Zahlen 0, 1 ... 5, indem wir durch jede Zahl den Dunkelheitsgrad ausdrücken, der zwischen der betreffenden Lichtgleiche und der nächstfolgenden durch Tuschlagen hervorzubringen ist. Auf einer nicht abwickelbaren Fläche giebt es im allgemeinen nur einzelne Punkte von der Helligkeit 1 (Helligkeitspole); die Helligkeit 0 kommt dem im Eigenschatten befindlichen Flächenteile zu. Wir können auch für diesen Teil, entsprechend den Cosinuswerten $\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \ldots$, eine Reihe von Kurven gleicher Neigung der Flächennormale gegen den Lichtstrahl konstruieren. Um ihnen eine physische Bedeutung unterzulegen, macht man zuweilen die — allerdings ganz willkürliche — Annahme, das von der Luft und von den umgebenden Flächen in den Schattenraum hinein zerstreute Licht sei dem direkt einfallenden genau entgegengesetzt und von halb so grofser Intensität wie jenes. Dann sind die eben erwähnten Kurven Orte gleicher Abnahme der Dunkelheit um je eine halbe Stufe.

144. Für die Darstellung der Helligkeit auf den meisten technischen Objekten bildet die Beleuchtung der Kugel eine bequeme Grundlage.

Die Lichtgleichen der Kugel sind Kreise, deren Ebenen auf der Lichtrichtung senkrecht stehen. Ist l der durch den Kugelmittelpunkt M gehende Lichtstrahl, O der auf ihm liegende

Helligkeitspol, so erhalten wir die Mittelpunkte $M_1 \dots M_4$ der mit $1 \dots 4$ bezeichneten Lichtgleichen durch Teilung der Strecke OM in fünf gleiche Teile; denn für alle Punkte des Kugelkreises, dessen Ebene z. B. in M_3 auf l senkrecht steht, bilden die zugehörigen Flächennormalen, d. h. die Kugelradien, mit l einen Winkel, dessen Cosinus gleich ist $M_3 M$, dividiert durch den Kugelradius, d. i. $= \frac{2}{5}$.

Um die Grundrifsprojektionen der Kreise 1, 2 ... zu konstruieren, drehen wir den Hauptkreis i, den die erste projizierende Ebene von l aus der Kugel schneidet, um seinen horizontalen Durchmesser, bis er mit dem ersten wahren Umrifs u der Kugel zusammenfällt. Dabei gelangt ein beliebiger Punkt L von l nach L^0 und l nach l^0 ($L'L^{0'} \perp l'$ und $= L''L_x - M''M_x$). Die Gerade $l^{0'}$ schneidet $i^{0'} = u'$ in $O^{0'}$; durch Einteilung von $O^{0'}M'$ ergeben sich die Punkte $M_1^{0'}, M_2^{0'} \dots$ Ziehen wir in $i^{0'}$ durch $M_3^{0'}$ die Sehne $C_3^{0'}D_3^{0'} \perp l^{0'}$, so ist $C_3^0 D_3^0$ die Umlegung des in i liegenden Durchmessers des Kreises 3, und wir erhalten als Grundrifsprojektion von 3 eine Ellipse 3′ mit der grofsen Achse $A_3'B_3' = C_3^{0'}D_3^{0'}$ und der kleinen Achse $C_3'D_3'$. Mit dem Umrifs u hat der Kreis 3 zwei Punkte T_3, U_3 gemein; wir finden sie auf der Schnittlinie der Ebenen beider Kreise, die im Schnittpunkte E_3 von C_3D_3 mit dem horizontalen Durchmesser von i auf diesem senkrecht steht ($E_3' = l' \times C_3^{0'}D_3^{0'}$, $T_3'U_3' \perp l'$).

Die Ellipsen 1′, 2′ ... sind einander ähnlich in paralleler Lage. — Die Aufrifsprojektion 3″ wird aus 3′ in bekannter Weise konstruiert (69); für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale sind 3′ und 3″ kongruent.

145. Mit Hilfe der bereits gezeichneten Lichtgleichen einer Kugel konstruieren wir für dieselbe Lichtrichtung die Lichtgleichen einer beliebigen Umdrehungsfläche mit vertikaler Achse a und dem Umrifsmeridian m: Um für den Parallelkreis p, dessen Aufrifsprojektion die Strecke $P''Q''$ ist, die Lichtgleichenpunkte zu bestimmen, ziehen wir an m'' die Tangente $P''S''$ bis a'' und parallel zu ihr an den zweiten scheinbaren Umrifs der Kugel die Tangente $\mathfrak{P}''\mathfrak{S}''$ bis zur Aufrifsprojektion des vertikalen Kugeldurchmessers, ferner durch den Berührungspunkt $\mathfrak{P}''$ die Gerade $\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''$ als Aufrifs eines horizontalen Kugelkreises $\mathfrak{p}$. Dann haben Kugel und Umdrehungsfläche in je zwei Punkten von $\mathfrak{p}$ und p, deren Verbindungslinien bezw. mit $\mathfrak{S}$ und S einander parallel sind, parallele Berührungsebenen und folglich gleiche Helligkeit. Wir brauchen demnach nur zu den Schnittpunkten von $\mathfrak{p}$ mit den Kugellichtgleichen die entsprechenden Punkte auf p zu ermitteln.

146. Auch die Helligkeit einer ebenen Fläche ist leicht zu bestimmen, sobald für irgend eine Hilfskugel die Lichtgleichen konstruiert sind. Sei E eine beliebige Ebene mit der Grundrifsspur e_1 und dem ersten Neigungswinkel ε_1, f eine Falllinie von E, f_0 ihre Umlegung um f' in Π_1 ($f' \perp e_1$, $\angle f'f_0 = \varepsilon_1$). Um auf der Hilfskugel denjenigen Punkt zu ermitteln, der dieselbe Helligkeit besitzt, wie E, fällen wir vom Kugelmittelpunkte M auf E ein Lot n ($n' \perp e_1$) und bestimmen seinen Schnittpunkt P mit der beleuchteten Halbkugel. Die erste projizierende Ebene von n schneidet die Kugel in einem Hauptkreise k, den wir um seinen horizontalen Durchmesser in den horizontalen Hauptkreis u umlegen. Ziehen wir dann $M'P'_0 \perp f_0$ bis $k'_0 = u'$, so ist P' der Fufspunkt des Lotes von P'_0 auf n'.

XI. Kotierte Projektion und topographische Flächen (Grundbegriffe).

147. Wir können die Lage eines Punktes P im Raume bestimmen durch seine senkrechte Projektion P' auf eine horizontale Ebene Π (Vergleichsebene) und eine Höhenzahl (Kote), welche seine Entfernung von dieser Ebene angiebt. Der Zeichnung ist immer ein Mafsstab beizufügen, und die Koten der unterhalb Π liegenden Punkte sind mit negativem Vorzeichen zu versehen.

Eine gerade Linie ist hiernach bestimmt durch die Projektionen und die Koten (= die kotierten Projektionen) von zwei ihrer Punkte. Sind auf der Projektion der Geraden die Punkte mit ganzzahligen Koten angegeben, so sagen wir, die Gerade sei graduiert. Der Abstand der Projektionen zweier Punkte der Geraden, deren Kotendifferenz = 1 ist, heifst das Intervall der Geraden.

Um die Verbindungslinie der Punkte P (5,7) und Q (8,5) zu graduieren, konstruieren wir die Umlegung der Geraden in die durch P gehende Horizontalebene und die Umlegungen der Punkte, deren Entfernungen von dieser Ebene = 0,3 und 1,3 sind.

Zur Darstellung einer Ebene genügt die Angabe einer graduierten Falllinie (Gefällemafsstab, durch eine Doppellinie bezeichnet).

Um die Schnittlinie zweier Ebenen zu konstruieren, ermitteln wir die Schnittpunkte zweier Paare von Hauptlinien mit gleichen Koten.

148. Unter einer topographischen Fläche (Terrainfläche) verstehen wir einen begrenzten Teil der Erdoberfläche, der so klein angenommen wird, dafs die Richtung der Schwerkraft in den einzelnen Flächenpunkten keine merklichen Unterschiede aufweist. Denken wir uns die Meeresoberfläche unter dem Festlande fortgesetzt, so dürfen wir das Stück derselben, das unter jener topographischen Fläche liegt, als eine horizontale Ebene ansehen. Wir bestimmen dann die Punkte der topographischen Fläche durch ihre kotierten Projektionen in Bezug auf diese Ebene.

Nehmen wir, von der Vergleichsebene ausgehend, in gleichen Abständen eine Reihe von Horizontalebenen an, so schneiden diese die topographische Fläche in sogenannten Niveau- oder Horizontallinien, deren Projektionen und Koten zur Darstellung der Fläche benutzt werden. Dabei treten als ausgezeichnete Flächenpunkte diejenigen hervor, die eine horizontale Berührungsebene besitzen. Wir bezeichnen sie als Gipfel- bezw. Muldenpunkte, wenn sie von den umgebenden Niveaulinien rings umschlossen werden, also höher bezw. tiefer liegen, als alle Nachbarpunkte, dagegen als Sattel- oder Jochpunkte, wenn die zugehörige Berührungsebene die Fläche in einer Kurve schneidet, die im Berührungspunkte einen Knotenpunkt hat. Im ersten Falle handelt es sich um einen elliptischen, im zweiten um einen hyperbolischen Flächenpunkt (105).

Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Falllinie oder Linie größter Neigung, welche die Niveaulinien überall rechtwinklig schneidet. In jedem Gipfel- oder Muldenpunkte treffen unendlich viele Falllinien zusammen. (Näheres siehe Wiener II, S. 388, sowie Rohn und Papperitz II, S. 324.)

XII. Axonometrie.

149. Axonometrie ist das Verfahren, die Parallelprojektion einer Raumfigur aus den Koordinaten ihrer Punkte zu konstruieren.

Wir bezeichnen mit Π die Projektionsebene (Zeichenebene) und denken uns die Originalfigur gegeben durch die Koordinaten ihrer Punkte in Bezug auf ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem $OXYZ$ in beliebiger Lage im Raume, oder — was auf dasselbe hinauskommt — durch ihre senkrechten Projektionen auf zwei der Koordinatenebenen $\Pi_1 = XOY$, $\Pi_2 = XOZ$, $\Pi_3 = YOZ$. Dann finden wir von irgend einem Originalpunkte P seine (senkrechte oder schiefe) Projektion $\overline{P}$ auf die Ebene Π durch Abbildung des Koordinatenzuges $OP_xP'P$. Diese Konstruktion ist ohne weiteres ausführbar, sobald wir die Projektionen der drei Koordinatenachsen und für jede Achsenrichtung das Verhältnis zwischen Original- und Bildstrecke kennen (Verkürzungsverhältnis im Falle senkrechter Projektion).

Der Punkt $\overline{P}$ heißt die axonometrische Projektion, das Bild $\overline{P}'$ von P' der axonometrische Grundriß von P. Durch Angabe von $\overline{P}$ und $\overline{P}'$ ist der Originalpunkt P bestimmt.

Je nachdem die projizierenden Strahlen auf Π senkrecht stehen, oder nicht, unterscheiden wir senkrechte und schiefe Axonometrie.

Senkrechte Axonometrie.

150. Die Lage des Koordinatensystems gegen die Bildebene Π ist bestimmt, wenn wir die Spurpunkte A, B, C der Koordinatenachsen OX, OY, OZ angeben und noch hinzufügen, auf welcher Seite von Π der Anfangspunkt O sich befinden soll. Dann ist nämlich O der Schnittpunkt dreier Halbkugeln mit den Durchmessern AB, BC, CA. — Das Spurendreieck ABC hat immer drei spitze Winkel.

Aufgabe. Die Achsenprojektionen und die Verkürzungsverhältnisse zu ermitteln, wenn das Spurendreieck ABC gegeben ist. Die Höhenlinien des Spurendreiecks sind die Achsenprojektionen. — Um den zweiten Teil der Aufgabe zu lösen, suchen wir die wahren Längen der Achsenabschnitte OA, OB, OC. Die projizierende Ebene von OC schneidet die Ebene AOB in der Falllinie OJ ($J = AB \times \overline{O}C$). Legen wir das rechtwinklige Dreieck COJ, das die Projektion $\overline{O}$ von O zum Höhenfußpunkte hat, um CJ in Π

um, so gelangt O nach O_0 auf dem Halbkreise über CJ ($\overline{O}O_0 \perp CJ$). Machen wir noch auf $\overline{O}C$ die Strecken $\overline{O}A_0 = \overline{O}A$, $\overline{O}B_0 = \overline{O}B$, so ist $OA = O_0A_0$, $OB = O_0B_0$, und die von den Geraden O_0A_0, O_0B_0, O_0C mit $\overline{O}C$ gebildeten Winkel sind gleich den Tafelneigungen α, β, γ der Achsen OX, OY, OZ. Dann entsprechen diesen Achsen die Verkürzungsverhältnisse

$$\lambda = \cos\alpha = \frac{\overline{O}A_0}{O_0A_0}, \quad \mu = \cos\beta = \frac{\overline{O}B_0}{O_0B_0}, \quad \nu = \cos\gamma = \frac{\overline{O}C}{O_0C}.$$

Sind statt des Spurendreiecks die Achsenprojektionen gegeben, so kann jedes Dreieck, das diese Geraden zu Höhenlinien hat, als Spurendreieck betrachtet werden.

151. Die Gerade $O\overline{O}$ bildet mit den drei Koordinatenachsen die Winkel $90^0 - \alpha$ u. s. w. Da die Summe der Quadrate der drei Richtungscosinus einer Geraden $= 1$ ist, so folgt

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$$

oder

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Hierbei ist jede der drei Zahlen λ, μ, $\nu \leqq 1$. Wäre z. B. $\nu = 1$, also die z-Achse $\parallel \Pi$, so würden die Projektionen der beiden anderen Achsen zusammenfallen — eine Annahme, die überaus unschöne Bilder liefert, und die wir deshalb von der weiteren Betrachtung ausschliefsen (Übereckprojektion). Für $\nu < 1$ folgt aus 1), dafs $\lambda^2 + \mu^2 > 1$ ist; es ist also um so mehr

$$\lambda^2 + \mu^2 > \nu^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Verstehen wir unter Verhältniszahlen irgend drei Zahlen l, m, n, die sich wie die Verkürzungsverhältnisse λ, μ, ν verhalten (oder wie die Projektionen der Kanten eines in der Koordinatenecke liegenden Würfels), so giebt es immer eine Strecke k, die, in den drei Koordinatenachsen aufgetragen, Projektionen liefert von den Längen l, m, n. Da

$$\lambda = \frac{l}{k}, \quad \mu = \frac{m}{k}, \quad \nu = \frac{n}{k} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

ist, so erhalten wir zur Bestimmung von k aus 1) die Gleichung

$$2k^2 = l^2 + m^2 + n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Zwischen den Zahlen l, m, n bestehen nach 2) drei Ungleichungen von der Form

$$l^2 + m^2 > n^2;$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier Verhältniszahlen ist immer gröfser, als das Quadrat der dritten.

Nach der Beschaffenheit der Verhältniszahlen unterscheiden wir drei Arten von senkrechter Axonometrie:

1. isometrische Projektion, wenn alle drei Verhältniszahlen einander gleich sind (Spurendreieck gleichseitig);

2. dimetrische Projektion, mit zwei gleichen Verhältniszahlen;
3. trimetrische Projektion, wenn alle drei Verhältniszahlen verschieden sind.

152. Aufgabe. Die Verkürzungsverhältnisse und die Achsenprojektionen zu bestimmen, wenn die Verhältniszahlen l, m, n gegeben sind. Wir zeichnen, unter Zugrundelegung einer beliebigen Längeneinheit, drei Strecken von den Längen l, m, n und konstruieren die Strecke k gemäfs Gleichung 4) als Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich ist $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$.

Hierauf machen wir in einer neuen Figur auf einer beliebigen Geraden ST die Strecken $SU = l$, $SV = m$, $SW = n$, beschreiben um S mit dem Radius k einen Kreisbogen und bestimmen seine Schnittpunkte X, Y, Z mit den Loten, die in U, V, W zu ST errichtet sind. Dann ist $\angle XST = \alpha$, $\angle YST = \beta$, $\angle ZST = \gamma$. Machen wir daher die Strecke $SR \perp ST$ gleich der willkürlich zu wählenden Entfernung des Koordinatenanfangspunktes O von Π und ziehen durch R zu ST eine Parallele, welche die Geraden SX, SY, SZ, sowie das in S zu SZ errichtete Lot bezw. in D, E, F, G schneidet, so sind RD, RE, RF gleich den Projektionen der zwischen O und Π liegenden Achsenabschnitte, und RG ist gleich der Projektion der durch O gehenden Falllinie der xy-Ebene (vergl. 150). Konstruieren wir demnach in einer dritten Figur über der Kathete $\overline{O}J = RG$ nach entgegengesetzten Seiten die rechtwinkligen Dreiecke $\overline{O}JA$ und $\overline{O}JB$ mit den Hypotenusen $\overline{O}A = RD$, $\overline{O}B = RE$ und verlängern $\overline{O}J$ über $\overline{O}$ bis C um RF, so sind $\overline{O}A$, $\overline{O}B$, $\overline{O}C$ die Projektionen und A, B, C die Spuren der x-, y- und z-Achse.

Um von einem Originalpunkte P, der durch seine Koordinaten x, y, z gegeben ist, die Projektion $\overline{P}$ zu ermitteln, machen wir auf $\overline{O}A$ die Strecke $\overline{O}\overline{P}_x = x \cos\alpha$ und ziehen $\overline{P}_x\overline{P}' = y \cos\beta \parallel \overline{O}B$, sowie $\overline{P}'\overline{P} = z \cos\gamma \parallel \overline{O}C$. Dabei finden wir z. B. die Strecke $x \cos\alpha$ als Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf SX liegt und von S um x entfernt ist, und der die Gerade SR berührt.

Sind die Koordinaten x, y, z durch ihre Mafszahlen gegeben, so empfiehlt sich die Konstruktion besonderer Verkürzungsmafsstäbe. Wir zeichnen zunächst den wahren Mafsstab $\mathfrak{w}$, projizieren dessen Teilpunkte aus einem beliebig gewählten Punkte und legen zwischen zwei Strahlen, die auf $\mathfrak{w}$ die Strecke k begrenzen, parallel zu $\mathfrak{w}$ die Strecken l, m, n. Auf den so erhaltenen Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ schneiden die Strahlen des Strahlenbüschels drei Mafsstäbe ein, deren Einheiten gleich sind der mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplizierten Einheit von $\mathfrak{w}$.

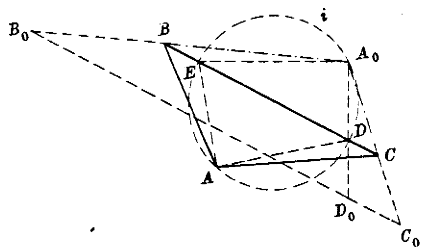
Schiefe Axonometrie.

153. Lassen wir die Projektionsrichtung noch unbestimmt, so können wir sowohl die Achsenprojektionen, als auch die Verhältniszahlen willkürlich annehmen; es gilt nämlich der Satz von Pohlke:

Drei Strecken von beliebigen Längen und Richtungen, die in einer Ebene von einem Punkte ausgehen, können immer als die Projektionen dreier gleich langen, in einem Punkte rechtwinklig zusammenstofsenden Strecken angesehen werden.

Um diesen Satz zu beweisen, lösen wir zuvor die Aufgabe: Ein gerades dreiseitiges Prisma durch eine Ebene so zu schneiden, dafs die entstehende Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich wird (Fig. 18). In der Zeichenebene Π sei ABC die Grundfläche des Prismas, A_0BC das Dreieck, dem die Schnittfigur ähnlich werden soll. Wir legen die gesuchte Ebene Σ der Einfachheit wegen durch A und bezeichnen mit AB_1C_1 die entstehende Schnittfigur, mit D den Schnittpunkt von BC und B_1C_1. — In der Ebene Σ befindet sich ein einziger rechter Winkel vom Scheitel A, dessen senkrechte Projektion auf Π wieder ein rechter ist, nämlich der Winkel zwischen der Falllinie und der Spurlinie AD (28, 36). Ist E_1 der Schnittpunkt jener Falllinie mit B_1C_1 und E seine senkrechte Projektion auf Π, so verhält sich

Fig. 18.



$$CD : DE : EB = C_1D : DE_1 : E_1B_1,$$

d. h. den Punkten D und E_1 der Figur AB_1C_1 entsprechen in der dazu ähnlichen Figur A_0BC die Punkte D und E. Den Geraden AD und AE_1 der ersten Figur sind also die Geraden A_0D und A_0E der zweiten zugeordnet, mithin ist $\angle DA_0E = 90^0$. Die Punkte D und E liegen daher auf dem durch A und A_0 gehenden Kreise i, dessen Mittelpunkt sich auf BC befindet.

Hierdurch ist zunächst der Schnittpunkt D von BC mit der Spurlinie von Σ, und damit diese selbst bestimmt. Bei der Ausführung der Konstruktion haben wir unter den beiden Schnittpunkten von i und BC denjenigen mit D zu bezeichnen, für welchen der spitze Winkel DA_0C gröfser ist als seine senkrechte Projektion DAC (36).

Machen wir auf A_0D die Strecke $A_0D_0 = AD$ und ziehen durch D_0 die Gerade $B_0C_0 \parallel BC$ bis A_0B und A_0C, so wird durch das Dreieck $A_0B_0C_0$ die Schnittfigur in wahrer Gröfse dargestellt. Damit ist die Entfernung des Punktes B_1 von A gefunden, also die Ebene Σ (zweideutig) bestimmt.

154. Beweis des Pohlkeschen Satzes (Fig. 19, a. f. S.). Sind QL, QM, QN drei beliebige Strecken in der Ebene Π und OX, OY, OZ drei beliebige, aber gleich lange Strecken im Raume, die paarweise senkrecht aufeinander stehen, so brauchen wir nur zu zeigen, dafs wir von der Figur $OXYZ$ eine Parallelprojektion konstruieren können, die zur Figur $QLMN$ ähnlich ist. Zu dem Zwecke schneiden wir LM

mit QN in J und bestimmen auf XY und OZ bezw. die Punkte S und T gemäſs den Proportionen

$$XS : YS = LJ : MJ$$

und

$$OT : ZT = QJ : NJ.$$

Projizieren wir die Raumfigur in der Richtung ST auf eine zu ST senkrechte Ebene E, so erhalten wir von S und T eine gemeinsame Projektion S' und in der Bildfigur $O'X'Y'Z'S'$ sind die Punktgruppen

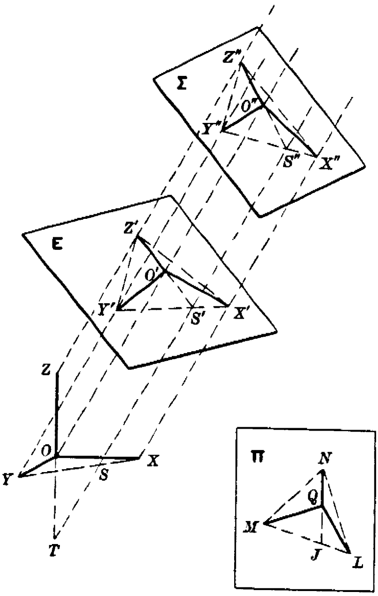
$$X'S'Y' \sim LJM,$$
$$Z'O'S' \sim NQJ.$$

Nun können wir nach 153. das gerade Prisma, welches $X'Y'Z'$ zur Grundfläche, also XX', YY', ZZ' zu Seitenkanten hat, mit zwei Scharen paralleler Ebenen in der Weise schneiden, daſs die Schnittfigur dem Dreieck LMN ähnlich wird. Ist Σ eine dieser Ebenen, $X''Y''Z''$ die entstehende Schnittfigur, und sind O'' und S'' die Schnittpunkte von Σ mit OO' und SS', so wird auch

$$X''S''Y'' \sim LJM,$$
$$Z''O''S'' \sim NQJ;$$

es ist also in der That die Figur $O''X''Y''Z'' \sim QLMN$.

Fig. 19.



155. Bei den praktischen Anwendungen der schiefen Axonometrie nimmt man gewöhnlich die xz-Ebene des räumlichen Koordinatensystems parallel zur Projektionsebene Π (schiefe Parallelperspektive). Dann erscheint der Winkel zwischen x- und z-Achse im Bilde wieder als Rechter, und sämtliche x- und z-Koordinaten bleiben unverändert. Für die Bilder der y-Koordinaten kann man in Übereinstimmung mit dem Pohlkeschen Satze die Richtung, sowie das Verhältnis zwischen Bild- und Originalstrecke beliebig wählen; zeichnet man sie unter einem Winkel von 30^0 gegen das Bild der x-Achse und auf die Hälfte verkürzt, so ergiebt sich das von uns zur Herstellung von Skizzen von Anfang an benutzte Abbildungsverfahren.

Zweiter Abschnitt.

Die Centralprojektion.

I. Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene.

156. Wir bezeichnen im Folgenden mit Π die Bildebene, mit O das Projektionscentrum (Auge), mit A den Fuſspunkt des Lotes von O auf Π; A heiſst der Hauptpunkt, die Strecke OA die Distanz des Bildes. Durch Hauptpunkt und Distanz ist die Lage des Projektionscentrums bestimmt, wenn auſserdem festgesetzt wird, daſs das Lot AO immer nach vorn, d. h. nach der Seite des Beschauers, errichtet werden soll. — Unter Distanzkreis verstehen wir den Kreis d, der in Π um A mit dem Radius OA beschrieben wird.

Die Centralprojektion einer Figur wird auch deren Perspektive genannt.

157. Die Projektion des Punktes P, also der Schnittpunkt von OP mit Π, soll mit P_c bezeichnet werden. Durch Angabe von P_c ist der Originalpunkt noch nicht bestimmt.

Das Bild eines unendlich fernen Punktes ist im allgemeinen ein endlicher Punkt. Jedem Punkte der Ebene Π^v, die durch $O \parallel \Pi$ gelegt wird, entspricht ein unendlich ferner Bildpunkt. Wir nennen Π^v die Verschwindungsebene.

158. Die Projektion einer Geraden g ist im allgemeinen wieder eine Gerade, nämlich die Schnittlinie g_c der projizierenden Ebene Og mit Π. Geht die Originalgerade durch O, so ist ihre Projektion ein Punkt.

Die Geraden g und g_c schneiden sich im Spurpunkte G. Dem unendlich fernen Punkte der Originalgeraden entspricht auf g_c ihr Fluchtpunkt G^∞; dabei ist $OG^\infty \parallel g$. — Die Bilder paralleler Geraden gehen durch einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

Durch Spur- und Fluchtpunkt ist die Originalgerade bestimmt. — Ein Punkt im Raume ist bestimmt durch sein Bild und durch Spur- und Fluchtpunkt einer durch ihn gehenden Geraden.

Der Schnittpunkt G^v der Originalgeraden g mit Π^v heiſst ihr Verschwindungspunkt. Ihm entspricht der unendlich ferne Punkt von g_c, und es ist $OG^v \parallel g_c$. — Originalgeraden, die sich in Π^v schneiden, haben parallele Bilder.

Specielle Fälle. a) Ist $g \parallel \Pi$, so ist $g_c \parallel g$. Dann verhalten sich die Abschnitte auf g_c wie die entsprechenden Abschnitte auf g. In diesem Falle ist zur Festlegung von g auſser der Geraden g_c noch irgend ein Punkt von g erforderlich, der seinerseits wieder in der vorher angegebenen Weise bestimmt wird.

b) Der Hauptpunkt A ist der Fluchtpunkt aller Normalen zu Π.

159. Eine Ebene E wird bestimmt durch irgend zwei ihrer Geraden, am zweckmäſsigsten durch ihre Spurlinie e und ihre unendlich ferne Gerade (Stellung), die selbst wieder durch ihr Bild e^∞, d. h. die Schnittlinie von Π mit der Parallelebene durch O zu E gegeben wird. Die Gerade e^∞ heiſst die Fluchtlinie von E; sie ist $\parallel e$. — Parallele Ebenen haben dieselbe Fluchtlinie.

Die Ebene E schneidet Π^v in ihrer Verschwindungslinie e^v.

Specielle Fälle. a) Geht E durch O, so fallen e und e^∞ zusammen, und die Bilder aller Punkte von E liegen auf e.

b) Ist $E \parallel \Pi$, so sind e und e^∞ unendlich fern, und die Ebene wird bestimmt durch Angabe eines ihrer Punkte. Dann entspricht jeder in E liegenden Figur ein dazu ähnliches Bild.

c) Ist $E \perp \Pi$, so geht e^∞ durch A.

160. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen Spur-, Flucht- und Verschwindungspunkt der Geraden bezw. in der Spur-, Flucht- und Verschwindungslinie der Ebene.

Daraus folgt: Wenn zwei Geraden einander schneiden, so ist die Verbindungslinie ihrer Spurpunkte parallel zur Verbindungslinie ihrer Fluchtpunkte.

II. Perspektive eines durch Grund- und Aufriſs gegebenen Gegenstandes.

161. Um von allen vertikalen Geraden parallele und vertikale Bilder zu erhalten, stellen wir die Bildebene Π im Folgenden immer vertikal.

Eine durch O gelegte horizontale Ebene, die Horizontebene, schneidet Π in einer durch A gehenden horizontalen Geraden h, dem Horizont des Bildes. Die Gerade h ist die Fluchtlinie aller horizontalen Ebenen. Sie schneidet den Distanzkreis d in den beiden Distanzpunkten D_1, D_2, den Fluchtpunkten solcher horizontalen Geraden, die mit Π einen Winkel von 45^0 einschliefsen.

Die Spurlinie g der horizontalen Grundriſsebene Π_1 (Bodenebene) heiſst die Grundlinie des Bildes.

162. Aufgabe. Die Perspektive eines Quaders zu zeichnen. Erste Lösung. In Fig. 20 a ist der Quader, dessen Grundfläche 1 2 3 4 in Π_1 liegt, in Grund- und Aufriſs gegeben; ebenso ist das Projektionscentrum O durch O' und O'' und die Lage der Bildebene Π durch die Grundlinie g bestimmt. Das Lot von O' auf g liefert die Grundriſsprojektion A' des Hauptpunktes A.

Die Perspektive des Quaders soll in Fig. 20b gezeichnet werden, die allein die Ebene Π, mit der Zeichenebene zusammenfallend, zur Darstellung bringt. Die horizontalen Geraden g und h sind Grundlinie und Horizont; ihr Abstand ist gleich der Entfernung des Punktes O'' von x in der vorhergehenden Figur. Auf h ist der Hauptpunkt A beliebig angenommen und $AA' \perp g$ gezogen worden.

Um zunächst die Grundfläche 1 2 3 4 abzubilden, bestimmen wir in Fig. 20 a von den Geraden 1 4 und 2 3 die Spurpunkte S und T, sowie den gemeinsamen Fluchtpunkt F ($O'F' \parallel 1\ 4$ bis g) und übertragen die erhaltenen Punkte unter Benutzung von A' und A bezw. nach g und h in Fig. 20 b. Der Fluchtpunkt von 1 2 ist unerreichbar; deshalb ermitteln wir auf SF das Bild 1_c von 1 mit Hilfe des projizierenden Strahles $O\,1$. Die Gerade $O'\,1$ (Fig. 20 a) schneidet g in der Grundrifsprojektion $\underline{1}$ von 1_c; dann liegt 1_c auf dem Lote, das in $\underline{1}$ (Fig. 20 b) zu g errichtet wird. — Die Punkte 2_c und 4_c können auch mittels der Diagonale 2 4 konstruiert werden, deren Bild durch Spurpunkt R und Fluchtpunkt E bestimmt ist ($O'E' \parallel 2\ 4$ bis g).

Fig. 20 a.

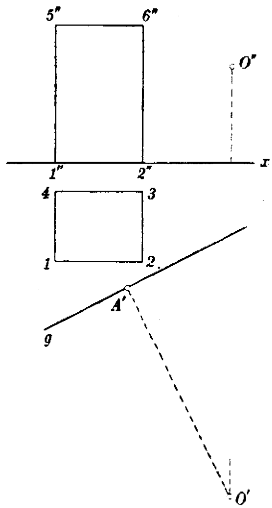
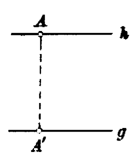


Fig. 20 b.



Die Bilder der Kanten 1 5, 2 6 . . . sind $\perp g$. Errichten wir in S zu g das Lot $SU = 1''5''$, so ist U der Spurpunkt, also UF das Bild der unbegrenzten Geraden 5 8. Noch vorteilhafter ist es, die Diagonale 6 8 abzubilden, indem wir $RZ = 1''5'' \perp g$ ziehen und Z mit E verbinden.

163. Zweite Lösung. Wir lassen wieder, wie in Fig. 20 b, die Ebene Π mit der Zeichenebene zusammenfallen und legen die Grundrifsebene Π_1 mit dem vorderen Teile nach oben um g in die Zeichenebene um. Dann gelangt O' nach O_0' auf AA' und das Rechteck 1 2 3 4 kommt in die Lage $1_0\,2_0\,3_0\,4_0$; dabei ist $A'O_0' = A'O'$ in Fig. 20 a, d. h. gleich der gegebenen Distanz, und $\angle A'S1_0 = \angle A'S1$.

Um den Fluchtpunkt F von 1 4 zu ermitteln, ziehen wir $O_0'F' \parallel 1_0 4_0$ bis g und $F'F \perp g$ bis h. Die Gerade $O_0'1_0$ ist die Umlegung der Grundrifsprojektion des Sehstrahles $O\,1$ und bestimmt auf g den Punkt $\underline{1}$. Die weitere Konstruktion erfolgt ebenso wie vorhin. — Dieses Verfahren bietet gegenüber dem früheren den Vorteil, dafs die Konstruktion auf eine einzige Figur beschränkt bleibt.

164. In derselben Weise, wie wir in 162. den Punkt 5_c mit Hilfe des Punktes 1_c und der wahren Länge der Strecke 1 5 ermittelt haben, lösen wir allgemein die Aufgabe: Die Projektion P_c des Punktes P zu bestimmen, wenn sein perspektiver Grundrifs P_c' (d. h. die Perspektive seiner Grundrifsprojektion P') und seine wahre Entfernung z von der Ebene Π_1 (g, h) bekannt sind. Wir ziehen durch P'_c eine beliebige Gerade, die g in S, h in F schneidet, und betrachten sie als Bild einer in Π_1 liegenden Geraden mit der Spur S und dem Fluchtpunkte F. In S errichten wir zu g das Lot $SU = z$ und ziehen UF als Bild einer horizontalen Geraden, die zur ersten im Abstande z parallel ist. Dann ist P_c der Schnittpunkt von UF mit dem Lote in P'_c zu g.

165. Schattenkonstruktionen. Der leuchtende Punkt L sei durch sein Bild L_c und seinen perspektiven Grundrifs L'_c in Bezug auf die Ebene $\Pi_1 = g, h$ gegeben. Der Schatten, den der Punkt $P(P_c, P'_c)$ auf Π_1 wirft, ist der Schnittpunkt P^* der Geraden LP und $L'P'$, also ist im Bilde $P^*_c = L_cP_c \times L'_cP'_c$.

Bei Parallelbeleuchtung sind L_c und L'_c bezw. die Fluchtpunkte der Lichtstrahlen und ihrer Grundrifsprojektionen. Dann liegt L'_c auf h, ist also der Fufspunkt des von L_c auf h gefällten Lotes. — Betrachten wir als unendlich ferne Lichtquelle die Sonne, so wird durch einen oberhalb h liegenden Punkt L_c das Bild des Mittelpunktes der vor dem Beschauer stehenden Sonne dargestellt; liegt aber L_c unterhalb h, so befindet sich die Sonne hinter dem Beschauer, und zu L_c gehört nur ein virtuelles Sonnenbild.

III. Ebene Figuren.

166. Konstruieren wir von einer in der Ebene E liegenden Figur $PQR\ldots$ die Centralprojektion $P_cQ_cR_c\ldots$, so stehen Original- und Bildfigur in folgender Beziehung: Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt, nämlich durch das Projektionscentrum O, und alle Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer Geraden, nämlich auf der Spurlinie e der Originalebene. Solche Figuren heifsen nach 52. kollinear in perspektiver Lage (perspektiv kollinear); O ist das Kollineationscentrum, e die Kollineationsachse, PP_c ein Kollineationsstrahl. Nach Aufhebung der perspektiven Lage nennen wir die Figuren einfach kollinear.

167. Konstruktion des Bildes einer ebenen Figur. Das Projektionscentrum O sei gegeben durch Hauptpunkt A und Distanzkreis d, die Originalfigur $\mathfrak{F}$ durch die Spur e und die Fluchtlinie e^∞ ihrer Ebene E und durch ihre Umlegung $\mathfrak{F}_0$ um e in Π, wobei noch hinzugefügt werden mufs, welcher Teil von E sich hinter der Ebene Π befindet. Sei g_0 irgend eine Gerade von $\mathfrak{F}_0$, so kennen wir von der Bildgeraden g_c zunächst den Spurpunkt $G = e \times g_0$. Der zugehörige Fluchtpunkt G^∞ ist der Schnittpunkt von e^∞ mit der Parallelen durch O zu g. Um ihn zu ermitteln, drehen wir die Ebene (O, e^∞) um e^∞ in demselben Sinne wie E, bis sie mit Π zusammenfällt. Bezeichnen wir mit O_0 die neue Lage von O, mit F^∞ den Schnittpunkt von AO_0 und e^∞, so ist $AO_0 \perp e^\infty$ und $F^\infty O_0 = F^\infty O$, d. h. gleich der Hypotenuse $F^\infty O^0$ des rechtwinkligen Dreiecks $AF^\infty O^0$, dessen Eckpunkt O^0 auf d liegt. Dann erhalten wir als Umlegung von OG^∞ die Gerade $O_0G^\infty \parallel g_0$ und damit $g_c = GG^\infty$.

Der Punkt F^∞ ist der Fluchtpunkt aller Falllinien von E (Hauptfluchtpunkt der Ebene).

168. Um zu irgend einem Punkte P_0 der umgelegten Originalebene das Bild P_c zu konstruieren, ziehen wir durch ihn zwei Geraden h_0 und i_0 als Umlegungen zweier Geraden h und i von E und bestimmen zu diesen in der eben entwickelten Weise die Bilder h_c und i_c; dann ist $P_c = h_c \times i_c$. Benutzen wir dabei als h_0 die Verbindungslinie von P_0 mit O_0, so fällt h_c mit h_0 zusammen, d. h. $O_0 P_0$ ist eine selbstentsprechende Gerade und enthält deshalb auch den Punkt P_c. Daraus folgt der Satz: Legt man eine ebene Figur um die Spurlinie ihrer Ebene und das Projektionscentrum in demselben Sinne um die zugehörige Fluchtlinie in die Bildebene um, so sind Bild und Umlegung der Originalfigur perspektiv kollinear für das umgelegte Projektionscentrum als Kollineationscentrum und die Spurlinie der Originalebene als Kollineationsachse.

169. Die Ebene E schneidet die Verschwindungsebene Π^v in der Verschwindungslinie $e^v \parallel e$. Verstehen wir unter F und F^v bezw. die Schnittpunkte von e und e^v mit der zu e^∞ senkrechten Ebene OAF^∞, so ist $OF^\infty FF^v$ ein Parallelogramm; wir erhalten demnach die Umlegung von e^v, indem wir auf FF^∞ die Strecke $FF_0^v = F^\infty O_0$ machen und durch F_0^v die Gerade $e_0^v \parallel e$ ziehen.

Der Schnittpunkt von g_0 und e_0^v ist der umgelegte Verschwindungspunkt G_0^v von g. Da der zugehörige Bildpunkt G_c^v auf g_c unendlich fern liegt, so ist nach 168. $O_0 G_0^v \parallel g_c$. Hieraus ergiebt sich eine zweite Konstruktion der Bildgeraden g_c mittels der Punkte G und G_0^v.

170. Die Teilungspunkte der Geraden. Aufgabe. Auf dem Bilde $g_c = GG^\infty$ der Geraden g vom Punkte P_c aus eine Strecke abzutragen, deren wahre Länge $= l$ ist. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich zunächst die folgende Lösung: Wir ziehen durch G und G^∞ in beliebiger Richtung zwei Parallelen e und e^∞ als Spur- und Fluchtlinie einer durch g gehenden Ebene E, die wir um e in die Bildebene umlegen. Konstruieren wir, wie in 167., vom Projektionscentrum O die Umlegung O_0 um e^∞, so geht die Umlegung g_0 von g durch $G \parallel O_0 G^\infty$, und die Gerade $O_0 P_c$ schneidet g_0 in P_0. Machen wir dann auf g_0 die Strecke $P_0 Q_0 = l$, so bestimmt die Gerade $O_0 Q_0$ auf g_c den Endpunkt Q_c der gesuchten Bildstrecke.

Bei dieser Konstruktion ist die Strecke $O_0 G^\infty$ gleich der Entfernung des Projektionscentrums O vom Fluchtpunkte G^∞, also unabhängig von der Richtung, die wir der Geraden e^∞ erteilen; wir finden sie unmittelbar durch Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks OAG^∞ in Π ($AO_* \perp AG^\infty$ bis d, $O_0 G^\infty = O_* G^\infty$). Die Geraden e und e^∞ sind demnach überhaupt überflüssig, und wir gelangen somit zu der folgenden vereinfachten Lösung: Man ziehe durch den Fluchtpunkt G^∞ und durch den Spurpunkt G der Geraden in beliebiger Richtung zwei Parallelen, mache auf der ersten die Strecke $G^\infty O_0$ gleich der Entfernung des Projektionscentrums von G^∞ und bestimme den Schnittpunkt P_0 der

Geraden $O_0 P_c$ mit der zweiten Parallelen. Auf dieser mache man $P_0 Q_0 = l$ und schneide g_c mit $O_0 Q_0$ in Q_c.

Dasselbe Verfahren dient umgekehrt zur Bestimmung der wahren Länge der Strecke $P_c Q_c$.

Ist von vornherein von irgend einer durch g gehenden Ebene E die Spur e und die Fluchtlinie e^∞ gezeichnet, so benutzen wir zweckmäfsig diese Geraden an Stelle der vorhin gezogenen Parallelen, machen also auf e^∞ die Strecke $G^\infty O_1$ (oder $G^\infty O_2$) $= G^\infty O$ und bestimmen auf e die Punkte P_1 und Q_1 in derselben Weise, wie zuvor die Punkte P_0 und Q_0. Dann heifsen O_1 und O_2 die Teilungspunkte der Geraden g hinsichtlich der Ebene E.

Die Teilungspunkte der Geraden g hinsichtlich aller durch sie gehenden Ebenen erfüllen den Teilungskreis t von g, der G^∞ zum Mittelpunkte hat.

Die Distanzpunkte D_1, D_2 sind die Teilungspunkte jeder Normalen zur Bildebene hinsichtlich der durch die Gerade gehenden Horizontalebene.

171. Um die Strecke PQ im Bilde in eine Anzahl, z. B. drei, gleicher Teile zu teilen, ist die Konstruktion des Teilungspunktes nicht erforderlich. Wir ziehen einfach durch den einen Endpunkt P_c der Bildstrecke $P_c Q_c$ und durch ihren Fluchtpunkt G^∞ in beliebiger Richtung bezw. die Parallelen a und b, tragen auf a eine beliebige Länge von P_c aus dreimal ab, wodurch die Punkte H, J, K erhalten werden, schneiden b mit $K Q_c$ in L und bestimmen die Schnittpunkte R_c und S_c von $P_c Q_c$ bezw. mit LH und LJ. — Betrachten wir b als die Fluchtlinie einer durch PQ gehenden Ebene, so ist $P_c K$ das Bild einer in drei gleiche Teile geteilten Hauptlinie derselben, und den Geraden LH, LJ, LK entsprechen parallele Originalgeraden; also ist $PR = RS = SQ$.

172. Die reduzierten Punkte. Die bisher entwickelten Regeln bedürfen einer Ergänzung für den Fall, dafs gewisse, zur Durchführung der Konstruktion notwendige Punkte aufserhalb des Rahmens der Zeichenfläche liegen. Wir betrachten z. B. die Aufgabe: Gegeben ist das Projektionscentrum O durch Hauptpunkt A und Distanz, eine Ebene E durch e, e^∞ und in ihr die Gerade g durch ihre Umlegung g_0; man soll die Bildgerade g_c konstruieren und auf ihr vom Spurpunkte G aus eine Strecke von der wahren Länge l abtragen. Nach 167. fällen wir zunächst von A auf e^∞ das Lot AF^∞ und bestimmen auf ihm das umgelegte Projektionscentrum O_0. Ist nun die Distanz so grofs, dafs O_0 unerreichbar wird, so machen wir auf $F^\infty A$ die Strecke $F^\infty A_r = \frac{1}{n} F^\infty A$, ferner $A_r O_r^0 \perp F^\infty A_r$ gleich dem n^{ten} Teile der Distanz und auf der Verlängerung von AF^∞ die Strecke $F^\infty O_{0r} = F^\infty O_r^0$; dabei ist die Zahl n so zu wählen, dafs alle genannten Punkte innerhalb der Zeichenfläche liegen. Ziehen wir dann $O_{0r} G_r^\infty \parallel g_0$ bis e^∞ und machen auf e^∞ die Strecke $F^\infty G^\infty = n \,.\, F^\infty G_r^\infty$, so ist G^∞ der Fluchtpunkt von g, also $g_c = G G^\infty$. — Die mit dem Index r versehenen Punkte heifsen reduzierte Punkte, also A_r der reduzierte Hauptpunkt u. s. w.

Um auf g_c den Punkt P_c zu ermitteln, dessen wahre Entfernung von $G = l$ ist, bestimmen wir auf e^∞ den Teilungspunkt O_1 von g ($G^\infty O_1 = n \,.\, G_r^\infty O_{0r}$), sowie auf e den Punkt P_1 ($G P_1 = l$) und ziehen $O_1 P_1$. Machen wir statt dessen auf e^∞ und e die Strecken $G^\infty O_{1r} = G_r^\infty O_{0r}$, $G P_{1r} = \frac{l}{n}$, so geht auch die Gerade $O_{1r} P_{1r}$ durch den gesuchten Punkt P_c; dabei ist O_{1r} der reduzierte Teilungspunkt von g.

Wird auch der Fluchtpunkt G^∞ unerreichbar, so finden wir die Bildgerade g_c mit Hilfe des reduzierten Spurpunktes G_r $\left(F^\infty G_r = \frac{1}{n} F^\infty G\right)$; dann ist nämlich $g_c \parallel G_r G_r^\infty$. Um in diesem Falle den Teilungspunkt O_1 zu erhalten, machen wir auf e^∞ in der Richtung nach F^∞ die Strecke $G_r^\infty Q = G_r^\infty O_{0r}$ und $F^\infty O_1 = n \,.\, F^\infty Q$. Befindet sich auch O_1 aufserhalb der Zeichenfläche, so ermitteln wir den reduzierten Teilungspunkt zufolge der Gleichung

$$F^\infty O_{1r} = F^\infty G^\infty - O_{1r} G^\infty = n \,.\, F^\infty G_r^\infty - O_{0r} G_r^\infty .$$

IV. Aufgaben über Geraden und Ebenen im Raume.

173. Wir beginnen mit einigen Aufgaben, die projektiver Natur, d. h. von Mafsbeziehungen völlig frei sind. Zu ihrer Lösung ist die Kenntnis des Projektionscentrums nicht erforderlich.

1. Aufgabe. Die Schnittlinie g der Ebenen E (e, e^∞) und Φ (f, f^∞) zu konstruieren. Die Spurlinien e und f treffen sich im Spurpunkte G von g; ebenso ist der Fluchtpunkt $G^\infty = e^\infty \times f^\infty$.

Ist einer dieser Punkte unerreichbar, so schneide man die beiden Ebenen mit einer geeigneten Hilfsebene Σ (s, s^∞). Dann geht g durch den Schnittpunkt der Geraden $\mathsf{E} \times \Sigma$ und $\Phi \times \Sigma$.

2. Aufgabe. Den Schnittpunkt P der Geraden g (G, G^∞) mit der Ebene E (e, e^∞) zu konstruieren. Man lege durch g eine beliebige Hilfsebene Φ (f, f^∞) und bestimme die Schnittlinie i von E und Φ; dann ist $P = g \times i$.

3. Aufgabe. Durch den Punkt P (P_c) der Geraden g (G, G^∞) zu einer anderen Geraden h (H, H^∞) eine Parallele i zu ziehen. Der Fluchtpunkt von i fällt mit H^∞ zusammen, also ist $i_c = P_c H^\infty$. Da ferner g und i sich schneiden, so liegt der Spurpunkt J von i auf der Parallelen durch G zu $G^\infty H^\infty$.

4. Aufgabe. Die Verbindungslinie m der Punkte P und Q zu bestimmen, die bezw. auf den Geraden g (G, G^∞) und h (H, H^∞) gegeben sind. Auf der Bildgeraden $m_c = P_c Q_c$ mufs noch der Spurpunkt M, sowie der Fluchtpunkt M^∞ ermittelt werden. Die Gerade m liegt nun in der Ebene $\mathsf{E} = (P, h)$, deren Spur- und Fluchtlinie wir konstruieren, indem wir durch P zu h die Parallele i ziehen. Bestimmen wir von i den Spurpunkt J wie in der vorigen Aufgabe, so ist $e = HJ$, und e^∞ geht durch $H^\infty \parallel e$. Dann sind M und M^∞ die Schnittpunkte von m_c bezw. mit e und e^∞.

174. Bei den folgenden Aufgaben metrischen Inhaltes ist das Projektionscentrum O immer durch den Distanzkreis d um A gegeben.

1. Aufgabe. Den Winkel α zweier (sich schneidenden oder windschiefen) Geraden g (G, G^∞) und h (H, H^∞) zu bestimmen. Da auch die Strahlen $O G^\infty$ und $O H^\infty$ den Winkel α einschliefsen, so finden wir seine wahre Gröfse durch Umlegung des Dreiecks $G^\infty O H^\infty$ in Π $(A F^\infty \perp G^\infty H^\infty,\ A O^0 \parallel G^\infty H^\infty$ bis d, $F^\infty O_0 = F^\infty O^0$, $\angle\, G^\infty O_0 H^\infty = \alpha)$.

2. Aufgabe. Die Entfernung des Punktes P der Geraden g (G, G^∞) von der Ebene E (e, e^∞) zu konstruieren. Wir fällen von P auf E ein Lot n, bestimmen seinen Schnittpunkt Q mit E und suchen die wahre Länge von PQ. — Der gemeinsame Fluchtpunkt N^∞ aller Normalen zu E ist der Schnittpunkt von Π mit dem Lote in O zur Ebene (O, e^∞). Die senkrechte Projektion dieses Lotes auf Π geht durch $A \perp e^\infty$, trifft also e^∞ im Hauptfluchtpunkte F^∞ von E. Um demnach N^∞ zu erhalten, zeichnen wir das rechtwinklige Dreieck $F^\infty O N^\infty$ in seiner Umlegung in Π; wir ziehen daher $A O^0 \perp A F^\infty$ bis d und $O^0 N^\infty \perp O^0 F^\infty$ bis $A F^\infty$. — Da g und n sich schneiden, so ist der Spurpunkt N von n der Schnittpunkt von $n_c = N^\infty P_c$ mit der Parallelen durch G zu $G^\infty N^\infty$. Um ferner den Punkt Q_c zu ermitteln, bestimmen wir die Punkte $J = e \times G N$ und $J^\infty = e^\infty \times G^\infty N^\infty$; dann ist $J J^\infty$ das Bild der Schnittlinie der Ebenen E und (g, n), folglich $Q_c = n_c \times J J^\infty$. — Die wahre Länge von PQ finden wir nach dem Verfahren des Teilungspunktes: Da die Entfernung des Punktes N^∞ von $O = O^0 N^\infty$ ist, so ziehen wir durch N eine Parallele zu $O^0 N^\infty$ und schneiden sie mit den Geraden $O^0 P_c$ und $O^0 Q_c$ bezw. in P^0 und Q^0; dann ist $PQ = P^0 Q^0$.

V. Kreis und Kugel.

175. Die Centralprojektion des Kreises ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Kreis mit der Verschwindungslinie seiner Ebene keinen, einen oder zwei Punkte gemein hat.

Aufgabe. Die Centralprojektion k_c des Kreises k zu konstruieren, der durch seine Ebene E (e, e^∞) und seine Umlegung k_0 um e in Π gegeben ist. Wir ziehen zunächst $A F^\infty \perp e^\infty$ und bestimmen in bekannter Weise die Umlegung O_0 des Projektionscentrums O um e^∞, sowie die umgelegte Verschwindungslinie e_0^v von E.

Erster Fall: k_0 schneidet e_0^v nicht; k_c ist also eine Ellipse. Erste Lösung. Sei M_0 der Mittelpunkt von k_0, $B_0 C_0$ der auf e senkrechte Kreisdurchmesser, S sein Schnittpunkt mit e, so entsprechen den Punkten B_0 und C_0 im Bilde die Schnittpunkte B_c und C_c von $S F^\infty$ mit $O_0 B_0$ und $O_0 C_0$. Genauer konstruieren wir B_c mit Hilfe des Teilungspunktes O_1 der Geraden MS hinsichtlich der Ebene E: Machen wir auf e^∞ und e bezw. die Strecken $F^\infty O_1 = F^\infty O_0$, $S B_1 = S B_0$, so geht $O_1 B_1$ durch B_c. Da die Tangenten in entsprechenden

Punkten von k_0 und k_c sich auf der Kollineationsachse e schneiden, so sind die Ellipsentangenten in B_c und $C_c \parallel e$; die Strecke $B_c C_c$ ist also ein Durchmesser von k_c, und der zu ihm konjugierte Durchmesser $D_c E_c$ geht durch den Mittelpunkt N_c von $B_c C_c \parallel e$. Um die Punkte D_c und E_c zu finden, ermitteln wir auf $B_0 C_0$ den Punkt N_0 (am sichersten wieder mittels des Teilungspunktes O_1) und ziehen durch ihn in k_0 die Sehne $D_0 E_0 \parallel e$, sowie die Geraden $O_0 D_0$ und $O_0 E_0$. Hierdurch ist k_c bestimmt. — Die Tangenten aus O_0 an k_0 berühren auch k_c.

Anmerkung. Um über k als Grundkreis einen geraden Kreiskegel von gegebener Höhe h zu konstruieren, errichten wir in M zu E ein Lot $MP = h$ (vergl. 174). Die scheinbaren Umrifslinien des Kegels sind die Tangenten aus P_c an k_c. Wir zeichnen sie, ohne die Ellipse k_c zu benutzen, indem wir P_c als Bild eines Punktes in E auffassen, dessen Umlegung P_0 wir ermitteln. (P_0 liegt auf $O_0 P_c$, und die Geraden $M_c P_c$ und $M_0 P_0$ schneiden sich auf e.) Dann entsprechen den Tangenten aus P_0 an k_0 die Tangenten aus P_c an k_c.

176. Zweite Lösung. Wir bezeichnen wie vorhin mit S die Spur, mit F^∞ den Fluchtpunkt des auf e senkrechten Kreisdurchmessers BC, ferner mit GH den zu e parallelen Durchmesser, mit O_1 und O_2 die Fluchtpunkte derjenigen Geraden von E, die mit e Winkel von 45^0 einschliefsen. Denken wir uns dem Kreise ein Quadrat umgeschrieben, dessen Seiten zu GH und BC parallel sind, und machen auf e die Strecken SQ und SR gleich dem Radius von k, sowie $ST = SU = SM_0$, so sind QF^∞ und RF^∞ die Bilder der auf e senkrechten Quadratseiten, TO_2 und UO_1 die Bilder der Diagonalen, und wir erhalten als Bild des Quadrates ein Paralleltrapez, dessen Seiten die Ellipse k_c in B_c, C_c, G_c, H_c berühren; dabei geht $G_c H_c \parallel e$ durch den Schnittpunkt M_c von SF^∞, TO_2 und UO_1.

Wir denken uns weiter dem Kreise k ein zweites Quadrat umgeschrieben, dessen Seiten zu den Diagonalen des ersten parallel sind, und bezeichnen mit V und W die auf GH liegenden Eckpunkte. Dann verhält sich $MG : MV = 1 : \sqrt{2}$; also stehen auch die entsprechenden Bildstrecken in demselben Verhältnis. Machen wir daher auf $G_c H_c$ die Strecken $M_c V_c = M_c W_c = M_c G_c \cdot \sqrt{2}$, so sind die Verbindungslinien von V_c und W_c mit O_1 und O_2 abermals vier Tangenten von k_c, und die betreffenden Berührungspunkte liegen auf TO_2 und UO_1.

Bei dieser Lösung ist die Umlegung k_0 des Kreises entbehrlich.

177. Zweiter Fall. Berührt k_0 die umgelegte Verschwindungslinie e_0^v in P_0^v, so ergiebt sich als Bild eine Parabel k_c, deren Achse $\parallel O_0 P_0^v$ ist. Ziehen wir $O_0 T_0^v \perp O_0 P_0^v$ bis e_0^v und von T_0^v an k_0 die Tangente t_0, so entspricht ihr die Scheiteltangente t_c von k_c, die sich mit t_0 auf e schneidet. Dem Berührungspunkte J_0 von t_0 ist der Scheitel J_c der Parabel zugeordnet.

178. Dritter Fall. Schneidet k_0 die Gerade e_0^v in P_0^v und Q_0^v, so ist k_c eine Hyperbel. Den Kreistangenten p_0 und q_0 in P_0^v und Q_0^v entsprechen die Asymptoten $p_c \parallel O_0 P_0^v$ und $q_c \parallel O_0 Q_0^v$.

179. Darstellung der Kugel. Der Kugelmittelpunkt M liege hinter der Ebene Π und sei bestimmt durch seine senkrechte Projektion M_1 auf Π und seine Entfernung t von dieser Ebene; überdies sei der Radius r der Kugel gegeben. Der vom Projektionscentrum O ausgehende Tangentenkegel berührt die Kugel in einem Kreise u und schneidet Π in einem Kegelschnitt u_c, dem scheinbaren Umrifs der Kugel. Die Brennpunkte von u_c sind die Projektionen der Endpunkte G und H des auf MM_1 liegenden Kugeldurchmessers (87). Legen wir die durch MM_1 und OA gehende Ebene, die mit der Kugel einen Hauptkreis k gemein hat, um AM_1 in die Bildebene um, so gelangen M, G, H, k, O bezw. nach M_0, G_0, H_0, k_0, O_0; dabei ist $M_1M_0 \perp AM_1$ und $= t$, $AO_0 \perp AM_1$ und gleich der Distanz. Dann erhalten wir die Brennpunkte G_c und H_c, sowie die Endpunkte der Hauptachse von u_c als die Schnittpunkte von AM_1 mit O_0G_0 und O_0H_0, sowie mit den Tangenten aus O_0 an k_0.

Alle Kugeln, die dem von O an die gegebene Kugel gelegten Tangentenkegel eingeschrieben sind, haben denselben scheinbaren Umrifs u_c. Ist also von der Originalkugel das Bild i_c des zu Π parallelen Hauptkreises i bekannt, so finden wir u_c als Umrifs einer Hilfskugel mit dem Hauptkreise i_c. Indem wir die soeben ausgeführte Konstruktion für diese Hilfskugel wiederholen, verbinden wir den Punkt A mit dem Mittelpunkte M_c von i_c (d. h. dem Bilde des Mittelpunktes M der Originalkugel), ziehen $AO_0 \perp AM_c$ bis zum Distanzkreise d und schneiden AM_c mit den Geraden von O_0 nach den Endpunkten des auf AM_c senkrechten Durchmessers von i_c, sowie mit den Tangenten aus O_0 an i_c.

Anhang.

Grundzüge der Reliefperspektive.

---

180. Um von einem räumlichen Gebilde in gesetzmäfsiger Weise eine räumliche Abbildung herzustellen, wählen wir im Raume einen Punkt O und zwei parallele (vertikale) Ebenen Π und Π^∞ und treffen die folgenden Festsetzungen:

1. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in Original- und Bildfigur sollen durch O gehen.
2. Jeder Punkt der Ebene Π soll sich selbst entsprechen.
3. Das Bild jedes unendlich fernen Punktes soll sich in der Ebene Π^∞ befinden.
4. Das Bild jeder geraden Linie soll wieder eine Gerade sein.

Dann ist zu jeder Originalgeraden g die Bildgerade g_1 eindeutig bestimmt, denn diese geht durch den Schnittpunkt G von g mit Π

und durch das Bild des unendlich fernen Punktes von g, d. h. den Schnittpunkt G^∞ von Π^∞ mit der Parallelen durch O zu g. — Das Bild P_1 eines beliebigen Raumpunktes P ergiebt sich als Schnittpunkt des Strahles OP mit dem Bilde irgend einer durch P gehenden Geraden.

Das auf solche Weise konstruierte Bild einer Raumfigur wird das Relief derselben genannt. Beide Figuren heifsen im allgemeinsten Sinne perspektiv kollinear. Der Punkt O wird als Kollineationscentrum (Gesichtspunkt), die Ebene Π als Kollineationsebene, die Ebene Π^∞ als Fluchtebene bezeichnet. Wir nennen ferner G den Spurpunkt, G^∞ den Fluchtpunkt der Geraden g und verstehen unter Hauptfluchtpunkt den Fufspunkt A^∞ des Lotes von O auf Π^∞, also den Fluchtpunkt aller Normalen zu Π.

Durch unser Abbildungsverfahren wird der unendliche Originalraum, der von O aus gesehen sich hinter der Ebene Π befindet, in einem Raume von begrenzter Tiefenausdehnung — zwischen Π und Π^∞ — dargestellt. Die Entfernung der Ebenen Π und Π^∞ heifst die Tiefe des Reliefs. Wird diese gleich Null, so verwandelt sich das Relief in eine gewöhnliche Centralprojektion auf die Ebene Π.

181. Dem unendlich fernen Punkte der Bildgeraden g_1 entspricht als Originalpunkt der Schnittpunkt G^v von g mit der Parallelen durch O zu g_1; wir bezeichnen ihn wieder als den Verschwindungspunkt von g. Wegen $G^v G = O G^\infty$ ist auch Abst. $(G^v, \Pi) =$ Abst. (O, Π^∞), d. h. konstant für alle Originalgeraden. Demnach liegen die Verschwindungspunkte aller Geraden in einer zu Π parallelen Ebene, der Verschwindungsebene Π^v, und es ist Abst. (Π^v, Π) $=$ Abst. (O, Π^∞).

182. Das Relief E_1 einer Ebene E ist wieder eine Ebene, denn allen Geraden in E entsprechen Bildgeraden, die sich sämtlich schneiden. Bestimmen wir von E die Spurlinie $e = \Pi \times E$, sowie die Fluchtlinie e^∞, d. h. die Schnittlinie von Π^∞ mit der Parallelebene durch O zu E, so ist $E_1 = (e, e^\infty)$. Die Ebene E schneidet Π^v in der Verschwindungslinie e^v, deren Verbindungsebene mit O zu E_1 parallel ist.

Entsprechende Figuren in E und E_1 sind perspektiv kollinear für O als Centrum und e als Achse. — Ist $E \parallel \Pi$, so gilt dasfelbe von E_1, und entsprechende Figuren beider Ebenen sind einander ähnlich.

Die Fluchtlinie aller horizontalen Ebenen geht durch A^∞ und heifst der Horizont des Reliefs.

Um das Relief eines Gegenstandes zu konstruieren, bedienen wir uns der Darstellung in Grund- und Aufrifs; dabei stellen wir die Ebene Π senkrecht zur Projektionsachse x.

183. Abbildung der Kugel. Da jeder ebene Schnitt der Kugel K in einen Kegelschnitt übergeht, so erhalten wir als Relief K_1 eine Fläche zweiter Ordnung ohne gerade Linien, und zwar ein Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder zweischaliges Hyperboloid, je nachdem die Kugel mit der Verschwindungsebene Π^v keinen Punkt gemein hat, oder sie in einem Punkte berührt, oder in einem Kreise schneidet. Insbesondere entsteht eine Umdrehungsfläche zweiter Ordnung, wenn der Kugelmittelpunkt auf der Geraden OA^{∞} liegt.

Der Tangentenkegel an K_1 aus irgend einem Punkte L_1 ist das Relief des Tangentenkegels aus dem entsprechenden Punkte L an K, und da dieser die Kugel in einem Kreise berührt, so folgt beiläufig der Satz: Die Eigenschattengrenze jeder elliptischen Fläche zweiter Ordnung ist ein Kegelschnitt. — Ist L_1 unendlich fern und K_1 ein elliptisches Paraboloid, so liegt L auf der Ebene Π^v, die in diesem Falle von K berührt wird. Dann ergiebt sich: Die Eigenschattengrenze eines elliptischen Paraboloids für Parallelbeleuchtung ist eine Parabel.

184. Specielle Fälle der Reliefperspektive. a) Ist O unendlich fern, so entspricht jedem unendlich fernen Originalpunkte ein unendlich fernes Bild; die Bilder paralleler Geraden sind also parallel, und die Ebenen Π^{∞} und Π^v fallen zusammen mit der unendlich fernen Ebene des Raumes. Wir bezeichnen die Beziehung zwischen Original- und Bildfigur in diesem Falle als (räumliche) Affinität in perspektiver Lage.

b) Liegt die Ebene Π unendlich fern, so entspricht jeder Originalgeraden eine parallele Bildgerade und entsprechende Strecken stehen in konstantem Verhältnis. Die Ebenen Π^{∞} und Π^v fallen mit der unendlich fernen Π zusammen: Ähnlichkeit in perspektiver Lage.

c) Ist sowohl O als auch Π unendlich fern, so sind Original- und Bildfigur kongruent und parallel.